IV Terme und Gleichungen

Lösungshinweise Kapitel IV – Erkundungen

Seite 106

1. Rechengesetze erkunden und anwenden

Bei den einzelnen Aufgaben der drei Karten ist die Anwendung folgender Gesetze hilfreich (Kommutativgesetz – K, Assoziativgesetz – A, Distributivgesetz – D):

Karte 1:
1) K – Lösung: 530 2) D – Lösung: 200
3) K – Lösung: 48 900 4) K, D – Lösung: 2200

Karte 2:
1) A – Lösung: 213,5 2) K – Lösung: 1
3) K; D – Lösung: 351 4) K – Lösung: 400

Karte 3:
1) D – Lösung: 40 2) K, A – Lösung: 150
3) D – Lösung: 1 4) K, A – Lösung: 137

Das Kommutativgesetz gilt für die Addition und die Multiplikation, aber nicht nicht für die Subtraktion und Division.
Das Assoziativgesetz gilt ebenfalls nur für die Addition und die Multiplikation.
Die Regeln für das Distributivgesetz können explizit notiert werden.
Beim Einsatz des Taschenrechners könnte man Tastenfolgen notieren lassen. Für die Karten 2 und 3 könnten diese wie folgt aussehen (die abgebildete Symbolfolge soll die Tastenfolge darstellen).

Karte 2:
1) 5 + 2 = : 7 + 212 + 0,5 =
2) 3 : 3 · 9 : 9 · 5 : 5 · 7 : 7 =
3) 13,2 + 12 + 1,8 = · 13
4) 555 – 47 – 45 – 63

Karte 3:
1) 2,25 + 7,5 = · 4 =
2) 2,5 · 1,2 · 10 · 5
3) 7 : 14 + 4,5 · 7 : 63 =
4) 77 – 13 + 4 + 63 + 6 =

Seite 107

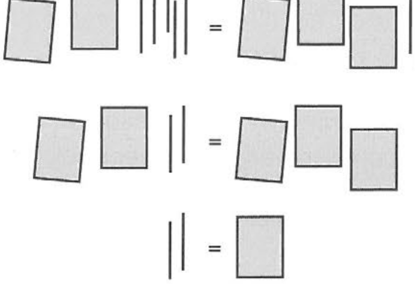
2. Knackt die Box

Forschungsauftrag 1: Boxen füllen
Durch Ausprobieren kann man ermitteln, dass in den blauen Boxen jeweils 2 Hölzchen liegen müssen. Um weitere Boxen zu füllen, kann man so vorgehen, dass die Boxen in gewünschter Anzahl zunächst leer aufgestellt werden, um sie dann anschließend mit Hölzchen zu füllen bzw. abschließend fehlende Hölzchen auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens zu ergänzen.

Forschungsauftrag 2: Boxen und Gleichungen
(1) $3 \cdot h = 3 + 2 \cdot h$
oder $h + h + h = 2 + h + 1 + h$
(2) $2 + h + 5 = h + 3 + 2 \cdot h$
oder $h + 7 = 3 \cdot h + 3$
(3) $4 \cdot h = 2 \cdot h + 6$
oder $2 \cdot h + h + h = h + 3 + h + 3$
(4) $2 \cdot h + 7 = 3 \cdot h + 1$
oder $h + 7 + h = 2 \cdot h + 1 + h$
Begründungen:
Durch Abzählen der einzelnen Boxen- und Hölzchenanzahlen kann man die Gleichungen leicht zuordnen.
Ergebnisse:
(1) 3 Hölzchen pro Box
(2) 2 Hölzchen pro Box
(3) 3 Hölzchen pro Box
(4) 6 Hölzchen pro Box
Bei der Situation im Forschungsauftrag 1 muss die Gleichung dann $2h + 5 = 3h + 3$ lauten.

Forschungsauftrag 3: Boxenfolgen legen
Die Ausgangssituation wird nochmals dargestellt. Im 1. Schritt wird auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens jeweils ein Hölzchen entfernt. Im 2. Schritt wird auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens jeweils eine Box entfernt. Man kann diese Handlungen jeweils durchführen, weil man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens das gleiche durchführt – an der Gleichheit ändert sich nichts. Im 2. Schritt ist daher gleichzeitig das Ergebnis angegeben.

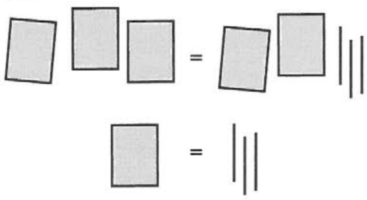
Boxenfolge für den Forschungsauftrag 1:



Also sind in einer Box 2 Hölzchen.

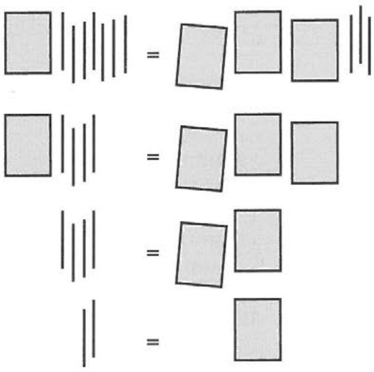
Boxenfolge für den Forschungsauftrag 2:

(1)



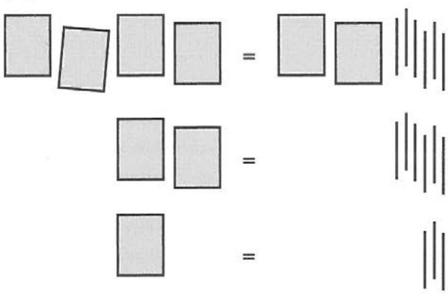
Also sind in einer Box 3 Hölzchen.

(2)



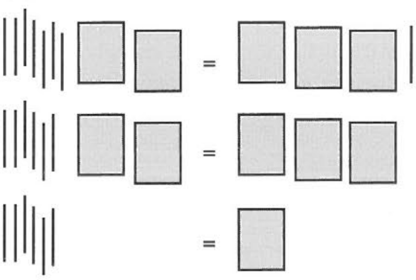
Also sind in einer Box 2 Hölzchen.

(3)



Also sind in einer Box 3 Hölzchen.

(4)



Also sind in einer Box 6 Hölzchen.

Wenn man die Idee der Boxenfolgen auf Gleichungen überträgt, ergeben sich folgende Gleichungsfolgen, indem man die Bilder einfach in Gleichungen überführt:

Forschungsauftrag 3:

$2h + 1 = h + 5$ (Ausgangssituation)

$2h = h + 4$ (1. Schritt)

$h = 4$ (2. Schritt)

Forschungsauftrag 1:

$2h + 5 = 3h + 3$

$2h + 2 = 3h$

$2 = h$

Forschungsauftrag 2:

(1) $3h = 2h + 3$

$h = 3$

(2) $h + 7 = 3h + 3$

$h + 4 = 3h$

$4 = 2h$

$2 = h$

(3) $4h = 2h + 6$

$2h = 6$

$h = 3$

(4) $7 + 2h = 3h + 1$

$6 + 2h = 3h$

$6 = h$

1 Rechnen mit rationalen Zahlen

Seite 110

1

a) −1
1 | b) −1
2 | c) −2
2

d) −126
−71 | e) −84
11 | f) −9
−88

2

a) 0
−24 | b) −23
−5 | c) −4
−1

3 a) 18 b) −5 c) 19
d) ? = 225 e) ? = −39 f) ? = −65

4

a) −84
91 | b) −162
260 | c) −104
−6600

d) −45
65 | e) 180
−1800

5

a) −5
11
9
−5; 9; 11 | b) 6
4
−4
−4; 4; 6 | c) −10
−11
11
−11; −10; 11

d) −5
−5
0
−5; −5; 0 | e) 4
−5
−3
−5; −3; 4

6

	Klammerregel	Ausmultiplizieren	Vergleich
a)	$4{,}2\cdot(7+3)=4{,}2\cdot 10=42$	$4{,}2\cdot(7+3)=4{,}2\cdot 7+4{,}2\cdot 3=29{,}4+12{,}6=42$	Klammerregel einfacher
b)	$12\cdot(30+5)=12\cdot 35=420$	$12\cdot(30+5)=12\cdot 30+12\cdot 5=360+60=420$	Ausmultiplizieren einfacher
c)	$12\cdot\left(\frac{7}{8}-4\right)=12\cdot\left(\frac{7}{2}-\frac{8}{2}\right)=12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$	$12\cdot\left(\frac{7}{2}-4\right)=12\cdot\frac{7}{2}-12\cdot 4=42-48=-6$	Gleichwertig
d)	$(60-4)\cdot 4=56\cdot 4=224$	$(60-4)\cdot 4=60\cdot 4-4\cdot 4=240-16=224$	Ausmultiplizieren einfacher
e)	$-0{,}4\cdot(20-5)=(-0{,}4)\cdot 15=-6$	$-0{,}4\cdot(20-5)=(-0{,}4)\cdot 20-(-0{,}4)\cdot 5$ $=-8+2=-6$	Ausmultiplizieren einfacher
f)	$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot 4=\left(\frac{4}{6}-\frac{1}{6}\right)\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot 4=2$	$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot 4=\frac{2}{3}\cdot 4-\frac{1}{6}\cdot 4=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}=2$	Klammerregel einfacher
g)	$1{,}2\cdot(-1{,}4-3{,}6)=1{,}2\cdot(-5)=-6$	$1{,}2\cdot(-1{,}4)-1{,}2\cdot 3{,}6=-1{,}68-4{,}32=-6$	Klammerregel einfacher
h)	$\left(0{,}005-\frac{3}{200}\right)\cdot(-200)$ $=\left(\frac{1}{200}-\frac{3}{200}\right)\cdot(-200)$ $=\left(-\frac{1}{100}\right)\cdot(-200)=2$	$\left(0{,}005-\frac{3}{200}\right)\cdot(-200)$ $=0{,}005\cdot(-200)-\frac{3}{200}\cdot(-200)$ $=-1+3=2$	Ausmultiplizieren einfacher

7

	Ausklammern	Punkt-vor-Strich-Regel	Vergleich
a)	$4{,}2\cdot 6+4{,}2\cdot 4=4{,}2\cdot(6+4)=42$	$4{,}2\cdot 6+4{,}2\cdot 4=25{,}2+16{,}8=42$	Ausklammern einfacher
b)	$15\cdot 20+8\cdot 15=15\cdot(20+8)$ $=15\cdot 28=420$	$15\cdot 20+8\cdot 15=300+120=420$	Punkt-vor-Strich einfacher
c)	$3\cdot(-1{,}2)+(-1{,}2)\cdot 2=(-1{,}2)\cdot(3+2)$ $(-1{,}2)\cdot 5=-6$	$3\cdot 2=-3{,}6-2{,}4=-6$	Gleichwertig
d)	$56\cdot 8-4\cdot 56=56\cdot(8-4)$ $=56\cdot 4=224$	$56\cdot 8-4\cdot 56=448-224=224$	Ausklammern einfacher
e)	$\frac{2}{3}\cdot(-6)-3\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot(-6-3)$ $=\frac{2}{3}\cdot(-9)=-6$	$\frac{2}{3}\cdot(-6)-3\cdot\frac{2}{3}=-4-2=-6$	Punkt-vor-Strich einfacher
f)	$(-7)\cdot 0{,}5-0{,}5\cdot(-11)$ $=0{,}5\cdot((-7)-(-11))=0{,}5\cdot 4=2$	$(-7)\cdot 0{,}5-0{,}5\cdot(-11)$ $=(-3{,}5)+5{,}5=2$	Gleichwertig
g)	$1200\cdot 0{,}3+1200\cdot 0{,}05=1200\cdot(0{,}3+0{,}05)$ $=1200\cdot 0{,}35=420$	$1200\cdot 0{,}3+1200\cdot 0{,}05=360+60=420$	Punkt-vor-Strich einfacher
h)	$1{,}2\cdot 1{,}4-1{,}2\cdot 6{,}4$ $=1{,}2\cdot(1{,}4-6{,}4)=1{,}2\cdot(-5)=-6$	$1{,}2\cdot 1{,}4-1{,}2\cdot 6{,}4=1{,}68-7{,}68=-6$	Ausklammern einfacher
i)	$-22{,}3\cdot 4{,}5+44{,}5\cdot 22{,}3=892$	$-22{,}3\cdot 4{,}5+44{,}5\cdot 22{,}3=$ $-100{,}35+992{,}35=892$	Punkt-vor-Strich einfacher

8

	Ergebnis	Benutzte Regel
a)	$4{,}7 - (1{,}7 + 4{,}7) = -1{,}7$	Minusklammerregel
	$4{,}7 - (1{,}7 - 4{,}7) = 7{,}7$	Klammerregel
	$4{,}7 - (-1{,}7 + 4{,}7) = 1{,}7$	Minusklammerregel
	$4{,}7 + (-1{,}7 - 4{,}7) = -1{,}7$	Plusklammerregel
b)	$15 \cdot 100 - 15 \cdot 4 = 1440$	Punkt-vor-Strich-Regel
	$15 \cdot 104 - 15 \cdot 4 = 1500$	Ausklammern
	$15 \cdot (-100) - 15 \cdot 4 = -1560$	Punkt-vor-Strich-Regel
	$15 \cdot (-96) + 15 \cdot (-4) = -1500$	Ausklammern
c)	$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{5}{7} + \frac{9}{7}\right) = \frac{3}{2}$	Klammerregel
	$\frac{6}{5} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{5}{2}\right) = 5$	Ausmultiplizieren
	$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{4}$	Punkt-vor-Strich-Regel
d)	$\frac{15}{14} \cdot \left(\frac{7}{10} - \frac{14}{15}\right) = -\frac{1}{4}$	Ausmultiplizieren
	$\frac{15}{14} \cdot \left(\frac{4}{11} - \frac{8}{22}\right) = 0$	2. Faktor = 0
	$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{9} - \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}$	Punkt-vor-Strich-Regel

Ordnen: a) $-1{,}7$; $-1{,}7$; $1{,}7$; $7{,}7$
b) -1560; -1500; 1440; 1500
c) $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{2}$; 5
d) $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{5}$; 0

9 a) Nein, da man ohne Klammer nur durch 49 dividieren und anschließend dieses Zwischenergebnis mit 56 multiplizieren würde, anstelle durch das Produkt von 49 und 56 zu dividieren.
$78 : (49 \cdot 56) = \frac{78}{2744} \approx 0{,}028$ ist ungleich dem Ergebnis $78 : 49 \cdot 56 = \frac{78}{49} \cdot 56 \approx 89$.
b) Ja, wie bei der Plusklammerregel.
c) Nein, da man ohne die Klammer die 12 nur mit 4 und nicht mit dem Ergebnis der Klammer (14) multiplizieren würde.
$12 \cdot (4 + 23 - 13) = 12 \cdot 14 = 168$ ist ungleich dem Ergebnis $12 \cdot 4 + 23 - 13 = 58$.
d) Nein, da man ohne Klammer nur die „13" subtrahieren würde und die „$4 \cdot 2$" addieren und nicht subtrahieren würde.
$4 \cdot 3 - (13 + 4 \cdot 2) = 12 - 21 = -9$ ist ungleich dem Ergebnis $4 \cdot 3 - 13 + 4 \cdot 2 = 12 - 13 + 8 = 7$.

10 $\frac{4}{7} : 2 - \frac{12}{7}$; $\frac{4}{7} : \left(2 - \frac{12}{7}\right) = 2$
$\frac{7}{3} - \frac{2}{3} : \frac{1}{3} - 1$; $\left(\left(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\right) : \frac{1}{3}\right) - 1 = 4$
$\frac{8}{3} - \frac{4}{3} : -\frac{2}{3} + 1$; $\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}\right) : \left(-\frac{2}{3} + 1\right) = 4$
$0{,}5 \cdot 7 + 0{,}5 : 0{,}5 + 1{,}5 - 1$;
$(0{,}5 \cdot 7) + 0{,}5 : ((0{,}5 + 1{,}5) - 1) = 4$

Seite 111

11 a) Individuelle Eingaben in den Taschenrechner in Abhängigkeit von dem Rechner.
b) und c) Individuelle Eingaben in den Taschenrechner. Es gibt verschiedene Möglichkeiten.
Man kann den Bruch in Klammern eingeben oder den Bruch als Division lesen: $-7 : 2 \cdot 2$.

12 Individuelle Lösung.

13 Individuelle Lösung.

14 Das Haus besitzt eine achsensymmetrische Fassade. Die Achse liegt dabei senkrecht mittig zwischen den oberen Fenstern.
Der obere Dachteil ist trapezförmig. Oberhalb der größeren Fenster sind im Dach Dreiecke zu erkennen. Die Fenster selber bestehen aus Dreiecken, Rechtecken und Quadraten.
Die nebeneinander liegenden Gauben (kleine oben und größere unten), der Fensterbereich in den Gauben und die Fensterbereiche in der Hauswand haben jeweils gleiche Formen und Abmessungen.
Unterschiede:
- Kleines Fenster auf der rechten Hälfte des Daches
- Hausnummer an der Wand in der rechten Hälfte des Hauses neben den Fenstern

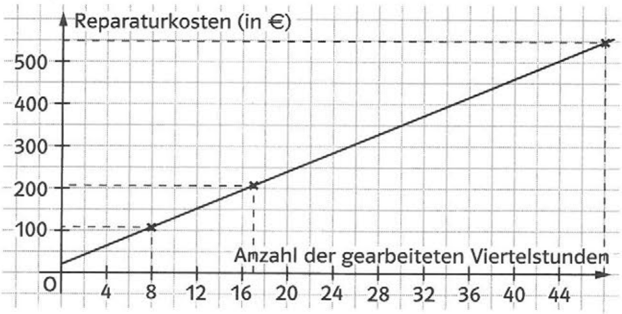
Die Lage der Zimmer in beiden Haushälften ist vermutlich gleich. So könnte es sein, dass die Bäder beider Haushälften nebeneinander in der Mitte des ganzen Hauses liegen. Dies hat Vorteile bei der Installation der Wasserrohre und der Abwässer.

15
a) Beginn: 180 €
Nach 1 Jahr: 183,24 €
Nach 2 Jahren: 186,54 €
Nach 3 Jahren: 189,90 €
Nach 4 Jahren: 193,32 €
Nach 5 Jahren: 196,80 €
Sie erhält 16,80 € Zinsen.
b) Beginn: 180 €
Nach 1 Jahr: 181,80 €
Nach 2 Jahren: 184,35 €
Nach 3 Jahren: 187,67 €
Nach 4 Jahren: 191,80 €
Nach 5 Jahren: 196,79 €
Sie erhält 16,79 € Zinsen.
Es wäre um 1 ct schlechter.

2 Mit Termen Probleme lösen

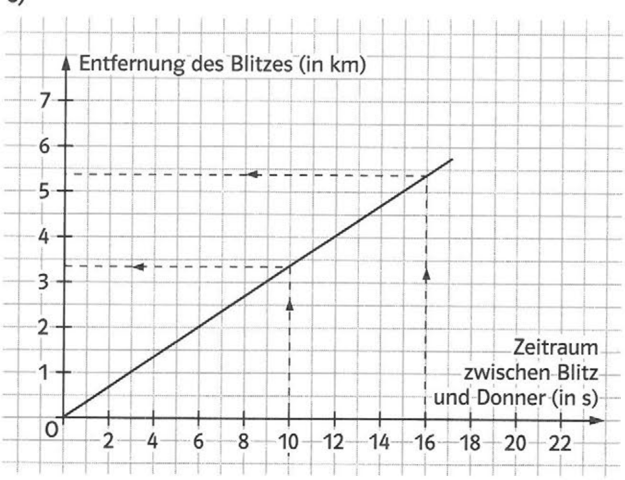
Seite 114

1 a) Festbetrag für die Reparaturkosten: 20 €
Kosten pro Viertelstunde: 11 €
b)



Die geforderten Werte sind am Graphen eingezeichnet.
c) 2 Stunden Arbeitszeit entsprechen 8 Viertelstunden. Die Reparaturkosten ergeben sich mit
$R = 20 + 11 \cdot 8 = 108$, also 108 €.
4,5 Stunden ≙ 18 Viertelstunden, also
$R = 20 + 11 \cdot 18 = 218$, also 218 €.
12 Stunden ≙ 48 Viertelstunden, also
$R = 20 + 11 \cdot 48 = 548$, also 548 €.
d) Die Lösungen kann man beispielsweise am Graphen ablesen. Bei 75 € hat er 5 Viertelstunden, also 1 Stunde und 15 Minuten gearbeitet. Bei 350 € sind es 30 Viertelstunden, also 7,5 Stunden und bei 295 € sind es 25 Viertelstunden also 6 Stunden und 15 Minuten gewesen.

2 a) Sei e die Entfernung des Blitzes (in km) und z die Zeit zwischen Blitz und Donner (in s). Den Werten der Tabelle entnimmt man: $e = z : 3$.
b) $z = 12$, also $e = 12 : 3 = 4$, also ist das Gewitter 4 km entfernt.
$z = 15$, also $e = 15 : 3 = 5$, also 5 km Entfernung.
$z = 18$, also $e = 18 : 3 = 6$, also 6 km Entfernung.
c)



Mögliche Werte sind (die gestrichelten Linien geben an, wie man die Werte ablesen kann):
$z = 10$, also $e \approx 3{,}3$ (genauer Wert: $e = 3{,}\overline{3}$)
$z = 6$, also $e = 2$
$z = 16$, also $e \approx 5{,}4$ (genauer Wert: $e = 5{,}\overline{3}$)
$z = 0$, also $e = 0$, der Blitz ist direkt „über" der Person.
d) $e = 12$ km; durch Ausprobieren erhält man $z = 36$, denn $36 : 3 = 12$.
Also ist der Zeitraum zwischen Blitz und Donner 36 Sekunden.
$z = 6$, also $e = 2$

3 a)

Anzahl der Sprossen	Anzahl der Hölzer
1	5
2	8
3	11
4	14
n	$2 + n \cdot 3$
1008	$2 + 1008 \cdot 3 = 3026$

b) Individuelle Lösung.

4 a) Alle Kantenlängen im Oktaeder sind gleich lang. Sei K die Länge einer Kante und D die benötigte Drahtlänge. Dann ist: $D = 12 \cdot K$.
$K = 5$, also $D = 12 \cdot 5 = 60$, also benötigt man 60 cm Draht.
$K = 8{,}5$, also $D = 12 \cdot 8{,}5 = 102$, also 102 cm Draht.
$K = 0{,}7$ m, also $D = 12 \cdot 0{,}7 = 8{,}4$, also 8,4 m Draht.
b) Mögliche Antworten:
- Zum Befestigen der Drähte an den Ecken muss man Schlaufen drehen, die zusätzlichen Draht benötigen.
- Beim Bauen könnte sich der Draht leicht biegen, sodass für eine Kante mehr Draht benötigt wird.

Seite 115

5 a) Term: $0{,}21\,x + 9{,}95$
Situation: Betrag einer monatlichen Telefonrechnung in € bei x telefonierten Einheiten. Jede Einheit kostet dabei 0,21 €, die Grundgebühr für den Anschluss beträgt 9,95 €.
b) Term: $2x + 8$
Situation: Umfang eines Rechtecks in cm mit Länge x cm und Breite 4 cm.
c) Term: $9 + 2x$
Situation: Zahlenrätsel: Multipliziere 2 mit einer gedachten Zahl und addiere das Ergebnis zu 9.

6 a) Sei b die Breite der quadratischen Pflastersteine (in cm) und A die Anzahl der benötigten Steine.

Dann ist $A = (480:b)\cdot(480:b)$, denn die Anzahl der Steine pro Reihe ergibt sich aus dem Term $480:b$ (beide Angaben in cm) und im quadratischen Hof gibt es ebenfalls $480:b$ Reihen.

b) $b = 4$, also $A = (480:4)\cdot(480:4) = 14\,400$, also werden 14 400 Pflastersteine benötigt.
$b = 5$, also $A = (480:5)^2 = 9216$, also 9216 Steine.
$b = 6$, also $A = (480:6)^2 = 6400$, also 6400 Steine.
$b = 8$, also $A = (480:8)^2 = 3600$, also 3600 Steine.

c) Sei P der Preis für alle Steine (in €) und p der Preis pro Stein (in €).
Dann ist: $P = A\cdot p$.
$b = 4$, also $P = 14\,400\cdot 0{,}05 = 720$, also 720 €.
$b = 5$, also $P = 9216\cdot 0{,}08 = 737{,}28$, also 737,28 €.
$b = 6$, also $P = 6400\cdot 0{,}12 = 768$, also 768 €.
$b = 8$, also $P = 3600\cdot 0{,}21 = 756$, also 756 €.

Mögliche Antworten:
- Ich würde die Steine mit der Breite 4 cm kaufen, da sie insgesamt am günstigsten sind.
- Ich würde die großen Steine kaufen ($b = 8$), weil ich sie am hübschesten finde und sie auch nicht am teuersten sind.
- Ich würde die großen Steine kaufen ($b = 8$), weil sie am schnellsten verlegt sind.

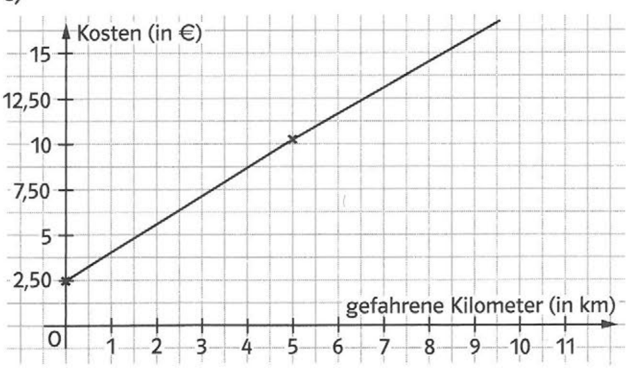
7 a) Term: $2{,}5 + 1{,}5x$
(Preis in € bei x gefahrenen km)

Strecke x (in km)	3	4	5	6	7	10
Preis $2{,}5 + 1{,}5x$	7	8,5	10	11,5	13	17,5

b) Term ab 5 km: $2{,}5 + 1{,}5\cdot 4 + (x - 4)1{,}4$ oder $2{,}5 + 1{,}5\cdot 4 + 1{,}4 + (x - 5)1{,}4$
(Preis in € bei x gefahrenen km)

Strecke x (in km)	5	6	7	10
Preis $8{,}5 + (x - 4)1{,}4$	9,9	11,3	12,7	16,9

c)



Verlauf: Die Kosten beginnen bei 2,50 €, weil dies die Grundgebühren sind. Danach steigt der Graph für die Kosten gleichmäßig an (pro gefahrenen Kilometer um 1,50 €) bis zu 5 gefahrenen Kilometern. Da die Kosten pro Kilometer ab dem 5. km günstiger sind (1,40 € pro Klometer) verläuft der Graph nun flacher – aber weiterhin gleichmäßig.

d) Lösung, grafisch oder durch Probieren: Für 5,50 € kann man 2 km fahren, für 29,50 € kann man 19 km fahren, für 40,00 € kann man 26,5 km fahren.

3 Gleichwertige Terme – Umformen

Seite 117

1 a)

x	$5\cdot x - 1$	$7\cdot x - 1 - 3\cdot x$	$-x + 6\cdot x - 1$
3	14	11	14
15	74	59	74
−5	−26	−21	−26
−7	−36	−29	−36

Umgeformt zunächst nach dem Kommutativgesetz und anschließend zusammengefasst.

x	$1 + 4\cdot x - 2$	$(x - 1) + 4\cdot x$	$4\cdot x + 1$
3	11	14	13
15	59	74	61
−5	−21	−26	−19
−7	−29	−36	−27

b) $5\cdot x - 1 = -x + 6\cdot x - 1 = (x - 1) + 4\cdot x$ (alle drei Terme sind äquivalent)
Begründung: $-x + 6\cdot x - 1 = 5\cdot x - 1$
$(x - 1) + 4\cdot x = x + 4\cdot x - 1 = 5\cdot x - 1$
$7\cdot x - 1 - 3\cdot x = 1 + 4\cdot x - 2$ (die beiden Terme sind äquivalent)
Begründung: $7\cdot x - 1 - 3\cdot x = 7\cdot x - 3\cdot x - 1 = 4\cdot x - 1$
$1 + 4\cdot x - 2 = 4\cdot x + 1 - 2 = 4\cdot x - 1$
Umgeformt jeweils zunächst nach dem Kommutativgesetz.
Alle Terme, die man durch Umformungen nicht ineinander überführen kann, sind nicht äquivalent.
Beispiele: $5\cdot x - 1$, $7\cdot x - 1 - 3\cdot x$ und $4\cdot x + 1$ oder $-x + 6\cdot x - 1$, $1 + 4\cdot x - 2$ und $4\cdot x + 1$ …

Seite 118

2 a) $4\cdot s$ b) $5\cdot x$ c) $5\cdot t$ d) $-5\cdot d$
e) 0 f) k g) 6b h) $19\cdot f$
i) 30g j) 3,6s k) 3,2t l) 20,3y

3 a) $9\cdot x$; also 18; 27; −36 bzw. −45
b) $12\cdot x$; also 24; 36; −48 bzw. −60
c) $3{,}8\cdot x$; also 7,6; 11,4; −15,2 bzw. −19
d) $-1{,}04\cdot x$; also −2,08; −3,12; 4,16 bzw. 5,2
e) $\frac{7}{3}\cdot x$; also $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$; $\frac{21}{3} = 7$; $-\frac{28}{3} = -9\frac{1}{3}$ bzw. $-\frac{35}{3} = -11\frac{2}{3}$
f) $\frac{13}{12}\cdot x$; also $\frac{26}{12} = 2\frac{1}{6}$; $\frac{39}{12} = 3\frac{1}{4}$; $-\frac{52}{12} = -4\frac{1}{3}$ bzw. $-\frac{65}{12} = -5\frac{5}{12}$

g) $-\frac{11}{16}\cdot x$; also $-\frac{22}{16} = -1\frac{3}{8}$; $-\frac{33}{16} = -2\frac{1}{16}$; $\frac{44}{16} = 2\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{55}{16} = 3\frac{7}{16}$

h) $\frac{5}{12}\cdot x$; also $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$; $\frac{15}{12} = 1\frac{1}{4}$; $-\frac{20}{12} = -1\frac{2}{3}$ bzw. $-\frac{25}{12} = -2\frac{1}{12}$

4 a) $7\cdot d$ b) $1000\cdot x$ c) $11\cdot f$ d) 0
e) $-x$ f) 0 g) $1\frac{2}{9}\cdot x$ h) $2\frac{1}{6}\cdot x$
Bei allen Aufgaben muss man zunächst das Kommutativgesetz anwenden, um anschließend zusammenfassen zu können.

5 Mögliche Lösungen:
a) $-2n + 12$; $6 + n + (n + 6) - n\cdot 4$;
$2 - n - 10 + (-5)\cdot(-4) - n$; $12 - n - n$
b) $-20n$; $(-10)\cdot n\cdot 2$; $5n - 10\cdot n + 3\cdot n\cdot(-5)$;
$-10n - n\cdot 10$; $n\cdot(-5)\cdot(-4)$
c) $2{,}83n$; $n\cdot(-2{,}83)\cdot(-1)$; $n\cdot 1{,}2 + 1{,}3\cdot n + n\cdot 0{,}33$;
$n\cdot 0{,}13 - 5n + 7{,}7\cdot n$
d) $n\cdot 13\cdot(-1)$; $5n - n\cdot 6 - 12n$; $-13n$; $(-3)\cdot n\cdot 4 - n$

6 a)

d	0	1	18	−7
5d − 3d − 1	−1	1	35	−15
3d + (1 − d)	1	3	37	−13
d + 2d + 3	3	6	57	−18
(1 − d) + 3d	1	3	37	−13
2d − 1	−1	1	35	−15
6d	0	6	108	−42

b) $3\cdot d + (1 - d) = (1 - d) + 3\cdot d$, denn umgeformt ist
$3\cdot d + (1 - d) = 3\cdot d + 1 - d = 3\cdot d - d + 1 = 2\cdot d + 1$
und $(1 - d) + 3\cdot d = 1 - d + 3\cdot d = 1 + 2\cdot d = 2\cdot d + 1$
$5\cdot d - 3\cdot d - 1 = 2\cdot d - 1$, wegen $5\cdot d - 3\cdot d = 2\cdot d$.
Die anderen Terme sind jeweils nicht äquivalent, weil man sie durch Umformen nicht ineinander überführen kann.
Für die Begründung reicht es nicht aus, mehrere Zahlen einzusetzen und die Werte miteinander zu vergleichen, denn so müsste man alle existierenden Zahlen prüfen, was unmöglich ist.
c) Die Terme $3\cdot d + (1 - d)$ und $(1 - d) + 3\cdot d$ kann man zu $2\cdot d + 1$ umformen – alle drei Terme sind äquivalent. Wenn nun d die Anzahl der Dreiecke beschreibt, kann man mit dem Term $2\cdot d + 1$ die Anzahl der Streichhölzer berechnen:
$d = 1 \Rightarrow$ 3 Hölzer
$d = 2 \Rightarrow$ 5 Hölzer
⋮ ⋮
$d = 4 \Rightarrow$ 9 Hölzer
Pro Dreieck werden 2 Hölzer benötigt und am Ende benötigt man noch 1 Streichholz, um das letzte Dreieck zu „schließen".
Da nun alle drei Terme äquivalent sind, kann man mit allen drei Termen die Anzahl der Streichhölzer berechnen.
d) Weil es keine negativen Anzahlen von Dreiecken gibt, kann d nicht negativ sein.
Deshalb hat Frank Recht.

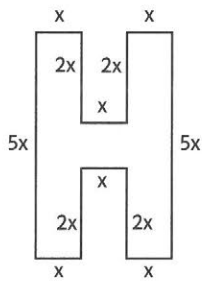
7

	12x − 5	2(6x − 3) + 1	−(x − 11x) − 3	7 − (2 − 5x)·2 − 6	−(5 − 12x)
−5	−65	−65	−53	−53	−65
−2	−29	−29	−23	−23	−29
−1,5	−23	−23	−18	−18	−23
7,5	85	85	72	72	85
12	139	139	117	117	139
20	235	235	197	197	235

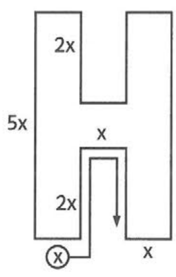
Die drei Terme $12x - 5 = 2(6x - 3) + 1 = -(5 - 12x)$ sind äquivalent und
die zwei Terme $-(x - 11x) - 3 = 7 - (2 - 5x)\cdot 2 - 6$ sind äquivalent, wie man durch Umformen zeigen kann.

Seite 119

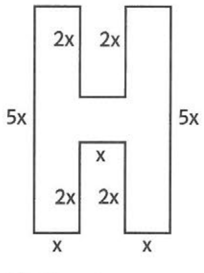
8 a)



Horst fasst von oben bis zur Mitte zusammen, dann von unten bis zur Mitte. Am Schluss addiert er die beiden langen Seitenstücke.



Helmut geht reihum:
Er beginnt links unten und addiert alle Teilstücke.



Hanna: außer bei den Stücken der Länge x fasst Hanna immer die Stücke einer Länge zusammen.
$2\cdot(3\cdot x)$
$4\cdot(2\cdot x)$
$2\cdot(5\cdot x)$

b) Horst
$2\cdot x + 2\cdot 2\cdot x + x + 2\cdot x + 2\cdot 2\cdot x + x + 2\cdot 5\cdot x$
$= 2x + 4x + x + 2x + 4x + x + 10x$
$= 24x$

Helmut
$x + 2\cdot x + x + 2\cdot x + x + 5\cdot x + x + 2\cdot x + x + 2\cdot x + x + 5\cdot x$
$= x + 2x + x + 2x + x + 5x + x + 2x + x + 2x + x + 5x$
$= 24x$
Hanna
$2\cdot(3\cdot x) + 4\cdot 2x + 2\cdot 5x$
$= 6x + 8x + 10x$
$= 24x$
Alle drei Terme kann man zu $24x$ umformen, weshalb sie äquivalent sind.
c) Mit dem äquivalenten Term $24x$ kann man die Drahtlänge für jedes x sehr schnell berechnen.

9 a) $4\cdot s + s - s$, $s\cdot 4$ und $2 + s\cdot 1 + 3s - 2$, denn alle drei Terme kann man zu $4s$ vereinfachen.
$3s + 4 - s$, $-1 - 5s + 5 + 7s$, denn beide Terme kann man zu $2s + 4$ vereinfachen.
$3\cdot s - 5$ und $-8 + s + 1 + 2s + 2$, da der zweite Term ebenfalls zu $3\cdot s - 5$ umgeformt werden kann.
$4s - 5 + s$ ist zu keinem anderen Term äquivalent.
b) $3x + 1 - x$, $x + 1 + x$ und $0{,}8 + 2{,}1 + x\cdot 2 - 1{,}9$, denn alle drei Terme kann man zu $2x + 1$ vereinfachen.
$x + x + x + 5$ und $\frac{5}{2}\cdot x + 7{,}3 + 0{,}5x - 2{,}3$, denn beide Terme lassen sich zu $3x + 5$ vereinfachen.
$x + 10 + x - 5 + 2x$, $4x + 5$ und $-2\cdot x + 3 + 6x + 2$, denn alle Terme lassen sich zu $4x + 5$ umformen.
c) Individuelle Lösung.

10 a) Sei r die Anzahl der gelaufenen Runden, R das Sponsorengeld von Ruth (in €) und V das Sponsorengeld des Vaters (in €). Dann sind
$R = 9 + 4\cdot r$ und $V = 7 + 5\cdot r$
b) $r = 4$, also $R = 9 + 4\cdot 4 = 25$, sie erhält also 25 €.
$r = 5$, also $R = 9 + 4\cdot 5 = 29$, sie erhält also 29 €.
$r = 9$, also $R = 9 + 4\cdot 9 = 45$, sie erhält also 45 €.
$r = 4$, also $V = 7 + 5\cdot 4 = 27$, sie erhält also 27 €.
$r = 5$, also $V = 7 + 5\cdot 5 = 32$, sie erhält also 32 €.
$r = 9$, also $V = 7 + 5\cdot 9 = 52$, sie erhält also 52 €.
c) Zusammen erhalten sie pro Runde (R + V):
$9 + 4\cdot r + 7 + 5\cdot r = 16 + 9\cdot r$; $r = 7$, also
$16 + 9\cdot 7 = 79$; beide zusammen erlaufen bei 7 Runden ein Sponsorengeld von 79 €.
d) Ja sie hat Recht, weil man beide Terme (wie in c)) addieren kann zu $16 + 9\cdot r$.
e) Beispielsweise durch Zeichnen der beiden Graphen und durch Ablesen des Schnittpunktes der Graphen erhält man die folgende Lösung: Nach 2 Runden erhalten beide gleich viel Geld. Man kann die Lösung auch durch Ausprobieren erhalten.
f) Ruth hat einen Sponsor, der eine höhere Teilnahmegebühr zahlt als der Sponsor von ihrem Vater, dafür erhält ihr Vater pro gelaufene Runde mehr Geld. Wer mehr Geld erläuft hängt deshalb von den gelaufenen Runden ab. Wenn beide sehr sportlich sind und viele Runden laufen, ist der Sponsor vom Vater im Vergleich „besser". Wenn nur eine Runde gelaufen wird, ist hingegen Ruths Sponsor der Bessere.

11 a) $n = 2$ b) $n = 3$ c) $n = 8$ d) $n = \frac{8}{3}$
e) $n = 20$ f) $n = 40$ g) $n = 8$ h) $n = 5$

12 Individuelle Lösung.

4 Ausmultiplizieren und Ausklammern – Distributivgesetz

Seite 121

1 a) $4\cdot d + 20$ b) $6\cdot x + 12$ c) $2\cdot s - 12$
d) $24t - 60$ e) $3 + 18\cdot x$ f) $-z - 2$
g) $-6 + 15\cdot k$ h) $5\cdot x + 10$

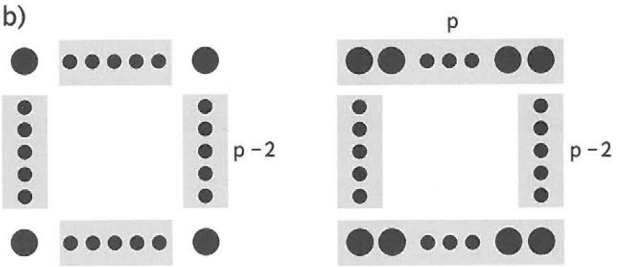
2 a) $5x - 20$ b) $6d + 13$ c) $2s + 8$
d) $9x + 14$ e) $3{,}5d - 4{,}9$ f) $-4 - 2d$
g) $2s + 1{,}5$ h) $18k + 9$

3 a) $8\cdot(x + 2)$ b) $5\cdot(3 - 7\cdot a)$ c) $24\cdot(d - 2)$
d) $9(-4 + x)$ e) $\frac{1}{2}\cdot(b - 3)$ f) $\frac{5}{8}\cdot(3x + 1)$
g) $3{,}5\cdot(v - 3)$ h) $\frac{1}{4}\cdot(3 - 2c)$

4 Individuelle Lösungen. Mögliche Lösungen sind:
a) $2(10x - 5)$ und $10(2x - 1)$; für beispielsweise $x = 2$ und $x = 4$ kommt jeweils 30 bzw. 70 heraus.
b) $4(2s + 1 + 1)$ und $2(4s + 2 + 2)$; für beispielsweise $s = 2$ und $s = 4$ kommt jeweils 24 bzw. 40 heraus.
c) $1{,}4(-2 + k)$ und $-1{,}4(2 - k)$; für beispielsweise $k = 2$ und $k = 4$ kommt jeweils 0 bzw. 2,8 heraus.
d) $3(-27x - 3)$ und $-9(9x + 1)$; für beispielsweise $x = 2$ und $x = 4$ kommt jeweils −171 bzw. −333 heraus.
e) $6(1 - 2 + 2s)$ und $3(2 - 4 + 4s)$; für beispielsweise $s = 2$ und $s = 4$ kommt jeweils 18 bzw. 42 heraus.
f) $7(d + 6d - 14)$ und $-7(-d - 6d + 14)$; für beispielsweise $d = 2$ und $d = 4$ kommt jeweils 0 bzw. 98 heraus.
g) $2(0{,}6x - 1{,}4 + 0{,}6x)$ und $-4(-0{,}3x + 7 - 0{,}3x)$; für beispielsweise $x = 2$ und $x = 4$ kommt jeweils 2 bzw. 6,8 heraus.
h) $2(0{,}5k + 1 + 4k + 5)$ und $-2(-0{,}5k - 1 - 4k - 5)$; für beispielsweise $k = 2$ und $k = 4$ kommt jeweils 30 bzw. 48 heraus.

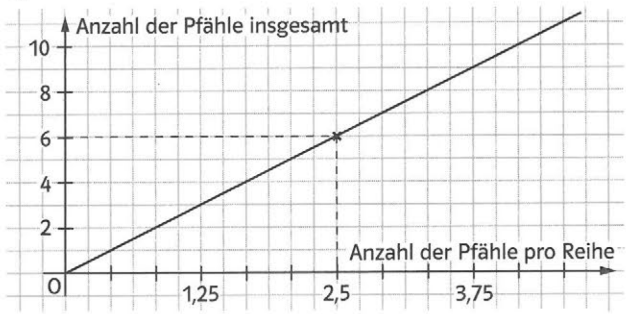
5 Die Terme aus a), b), g) und h) sind äquivalent zu $6x$.

6 a) Die linke Figur beschreibt den Term $4\cdot p - 4$ anschaulich. Jede Reihe enthält p Pfähle. Da es 4 Reihen gibt, benötigt man $4\cdot p$ Pfähle, wobei jetzt die Ecken jeweils doppelt gezählt wurden. Deshalb müssen insgesamt 4 Pfähle wieder abgezogen werden (die markierten Ecken). Es ergibt sich der Term $4\cdot p - 4$.
Wenn man beim Zaun jeweils die rechteckig unterlegten Pfähle zählt, ergeben sich 4 Reihen mit jeweils $p - 1$ Pfählen. Deshalb ergeben sich alle Pfähle des Zauns mit dem Term $4\cdot(p - 1)$ (rechte Figur).
b)



$4\cdot(p - 2) + 4$ $\quad$ $2\cdot p + 2\cdot(p - 2)$
$4\cdot(p - 2) + 4$ $\quad$ $2\cdot p + 2\cdot(p - 2)$

c) $p = 3$, also $4\cdot 3 - 4 = 8$; man benötigt 8 Pfähle.
$p = 5$, also $4\cdot 5 - 4 = 16$; man benötigt 16 Pfähle.
$p = 25$, also $4\cdot 25 - 4 = 96$; man benötigt 96 Pfähle.
$p = 31$, also $4\cdot 31 - 4 = 120$;
man benötigt 120 Pfähle.
$p = 46$, also $4\cdot 46 - 4 = 180$;
man benötigt 180 Pfähle.
d)



Bei $p = 2{,}5$ würde die Anzahl der Pfähle insgesamt 6 betragen. Das liefert auch die Rechnung $(4\cdot 2{,}5 - 4)$. Allerdings gibt es keine 2,5 Pfähle pro Reihe, daher ist die Fragestellung nicht realistisch.
Daraus folgt weiter:
Für p müssen natürliche Zahlen eingesetzt werden, weil es keine halbe bzw. anteilige Anzahl von Pfählen gibt. Die Variable p muss des Weiteren größer als 1 sein. Denn wenn $p = 1$ wäre, würde sich kein quadratisches Grundstück einzäunen lassen, weil dann pro Reihe insgesamt nur ein Pfahl zur Verfügung steht.
Rechnerische Begründung: Die Terme liefern für $p = 1$ das Ergebnis 0, man würde also 0 Pfähle benötigen.

Seite 122

7 a) $4\cdot(5 + x) + 3\cdot(2x - 4)$
$= 20 + 4\cdot x + 6\cdot x - 12$ Distributivgesetz
$= 4x + 6x + 20 - 12$ Kommutativgesetz
$= 10x + 8$
b) $7\cdot(n - 2) + 5(1 + 2n)$
$= 7n - 14 + 5 + 10n$ Distributivgesetz
$= 7n + 10n - 14 + 5$ Kommutativgesetz
$= 17n - 9$
c) $5\cdot(d + 3) + 4(2 - 2d)$
$= 5d + 15 + 8 - 8d$ Distributivgesetz
$= 5d - 8d + 15 + 8$ Kommutativgesetz
$= -3d + 23$
d) $-5\cdot(4 + 2v) + 1{,}5\cdot(2 - 4v)$
$= -20 - 10v + 3 - 6v$ Distributivgesetz
$= -10v - 6v - 20 + 3$ Kommutativgesetz
$= -16v - 17$
e) $-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\cdot x + 1\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2} - 4x\right)$
$= -\frac{3}{2}x - \frac{3}{5} + \frac{3}{8} - x$ Distributivgesetz
$= -\frac{3}{2}x - x - \frac{3}{5} + \frac{3}{8}$ Kommutativgesetz
$= -2\frac{1}{2}x - \frac{9}{40}$
f) $-\frac{5}{6}\left(\frac{3}{4}b - \frac{4}{9}\right) - \left(-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(14 - \frac{7}{9}b\right)$
$= -\frac{5}{8}b + \frac{10}{27} + 6 - \frac{1}{3}b$ Distributivgesetz
$= -\frac{5}{8}b - \frac{1}{3}b + \frac{10}{27} + 6$ Kommutativgesetz
$= -\frac{23}{24}b + 6\frac{10}{27}$

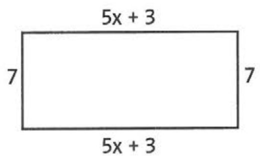
8 a) Term 1: $(3\cdot x + 5) + 10\cdot x = 13x + 5$
Term 2: $4\cdot(1 - x) - 7 = -4x - 3$
Term 3: $-4x + 3$
Term 4: $(3x + 5)\cdot 5 - x = 14x + 25$
Term 5: $32 + 7\cdot(2x - 1) = 14x + 25$
Term 6: $2\cdot(-x) + 22 + 3\cdot x = x + 22$
Term 7: $9x - 3$
Term 8: $13x + 5$
Term 9: $2\cdot(5 - 2\cdot x) - 13 = -4x - 3$
Term 10: $7\cdot x - (3 - 2\cdot x) = 9x - 3$
Term 11: $7 + x\cdot 2 + 15 - x = x + 22$
Term 12: $5\cdot x + 3 - 9\cdot x = -4x + 3$
Äquivalent sind daher folgende Termpaare:
1 und 8; 2 und 9; 3 und 12; 4 und 5; 6 und 11; 7 und 10.
b) Individuelle Lösung.

9 a) $2 + d\cdot 4 = 2 + 4d = 4d + 2$, also äquivalent
b) $2\cdot(1 + 2x) = 2 + 4x$ ist nicht äquivalent zu $4 + 4x$
c) $s\cdot 7 - 27 = 7s - 27$ ist nicht äquivalent zu $27 - 7s = -7s + 27$
d) $5a - 55 = 5\cdot(a - 11)$, also äquivalent
e) $3\cdot(0{,}5 + 2t) = 1{,}5 + 6t$ ist nicht äquivalent zu $6t + 2{,}5 = 6t + 1{,}5$
f) $5\cdot x + 2{,}5 = 5\cdot(x + 0{,}5) = (x + 0{,}5)\cdot 5$, also äquivalent; $(x + 0{,}5)\cdot 5 = 5x + 2{,}5$

10 a) $4x + (2x - 5) = 4x + 2x - 5 = 6x - 5$
b) $9v - (2 - 5v) + 10 = 9v - 2 + 5v + 10 = 14v + 8$
c) $-(7 - 6x) + 4x + 5 = -7 + 6x + 4x + 5 = 10x - 2$
d) $r \cdot 13 + 3 \cdot (5r + 7) = 13r + 15r + 21 = 28r + 21$
e) $(-10) \cdot d - (7 + 7d) \cdot 2 = -10d - 14 - 14d$
$= -24d - 14$
f) $5 \cdot (-8z) - 2(6z + 20) = -40z - 12z - 40$
$= -52z - 40$
g) $5a + [3a - (4a + 1)] = 5a + [3a - 4a - 1] = 4a - 1$
h) $[(7x - 4) - (5x + 8)] + 9 = [7x - 4 - 5x - 8] + 9$
$= 2x - 3$
i) $\frac{3}{5}d - \left[\left(\frac{4}{5}d - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{3}\right] = \frac{3}{5}d - \left[\frac{4}{5}d - \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\right]$
$= \frac{3}{5}d - \frac{4}{5}d - \frac{4}{3} = -\frac{1}{5}d - \frac{4}{3}$

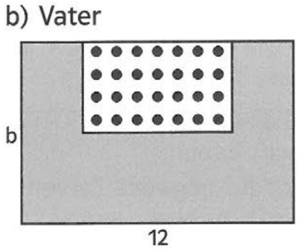
11 Länge des Drahtes =
$10 + 3x + 2 + 9 + x + 1 + x + 3x + 2 = 8x + 24$

12 Individuelle Lösungen. Mögliche Lösung:

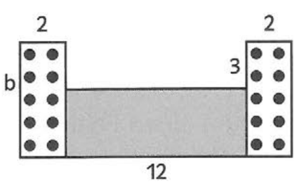


Seite 123

13 a) Mutter
b bezeichnet die Breite des Grundrisses und die halbe Länge beträgt 6 m. Der Term $6 \cdot b$ beschreibt damit die farblich unterlegte Fläche. Nun muss man die mit x schraffierte Fläche wieder abziehen $(-3 \cdot 4)$. Da der Grundriss symmetrisch ist, benötigt man diesen zusammengesetzten Term $6 \cdot b - 3 \cdot 4$ zweimal.
Tochter
$b - 3$ ist das untere Teilstück der Breite des Grundrisses. Mit dem Term $12 \cdot (b - 3)$ berechnet man somit die farblich unterlegte Fläche (unteres Rechteck). Mit dem Term $2 \cdot 3$ bestimmt man die mit x schraffierte Fläche – diese gib es zweimal. Also $12 \cdot (b - 3) + 2 \cdot (2 \cdot 3)$.
b) Vater



Sohn

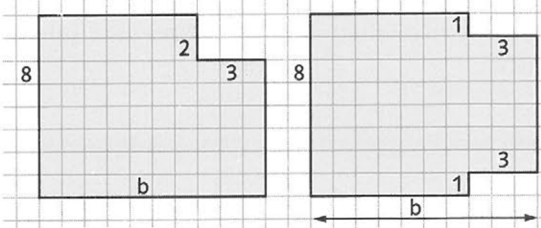


c) $12 \cdot b - 3 \cdot 8 = 12b - 24$ (Vater)
$2 \cdot (6 \cdot b - 3 \cdot 4) = 2 \cdot (6b - 12) = 12b - 24$ (Mutter)
$12 \cdot (b - 3) + 2 \cdot (2 \cdot 3) = 12b - 36 + 2 \cdot 6 = 12b - 24$ (Tochter)
$8 \cdot (b - 3) + 2 \cdot (2 \cdot b) = 8b - 24 + 4b = 12b - 24$ (Sohn)

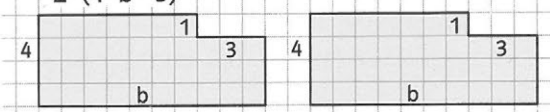
Alle Terme lassen sich zu $12b - 24$ umformen, womit die Äquivalenz gezeigt wurde.
d) $b = 7\,m$, $12 \cdot 7 - 24 = 60$ Die Fläche beträgt $60\,m^2$.
$b = 8\,m$, $12 \cdot 8 - 24 = 72$ Die Fläche beträgt $72\,m^2$.
$b = 10\,m$, $12 \cdot 10 - 24 = 96$ Die Fläche beträgt $96\,m^2$.
Es wurde der Term $12b - 24$ zur Berechnung gewählt, weil er am schnellsten zu berechnen ist.
e) durch Ausprobieren erhält man $b = 9\,m$: Die Probe ergibt: $12 \cdot 9 - 24 = 84$.

14 a) und b)

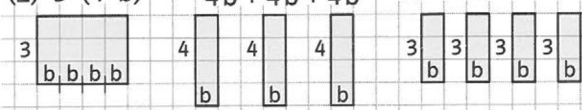
(1) $8 \cdot b - 2 \cdot 3$ $\quad$ $8 \cdot b - 3 - 3$



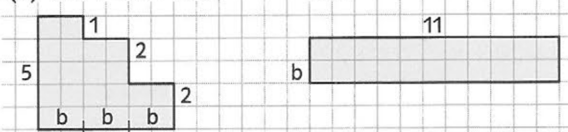
$2 \cdot (4 \cdot b - 3)$



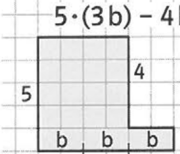
(2) $3 \cdot (4 \cdot b)$ $\quad$ $4b + 4b + 4b$ $\quad$ $3b + 3b + 3b + 3b$



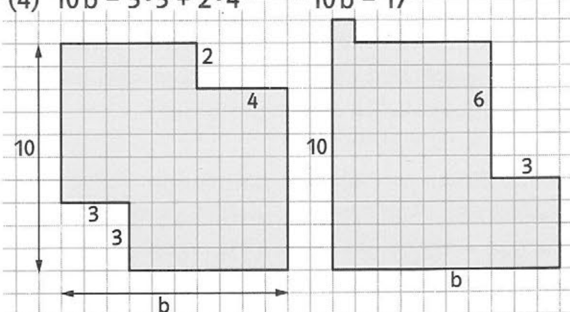
(3) $5b + 4b + 2b$ $\quad$ $11b$



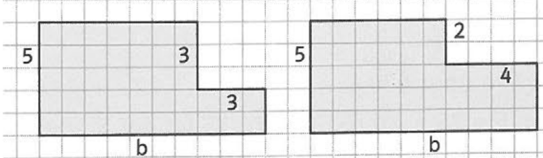
$5 \cdot (3b) - 4b$



(4) $10b - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ $\quad$ $10b - 17$



$(5b - 3 \cdot 3) + (5b - 2 \cdot 4)$



c) Individuelle Lösung.

15 a) Die Variable a steht für die Anzahl der Tafeln.
b) $a \cdot 55$ stellt die Kosten für a Tafeln Alpenstolz dar. $(12 - a)$ beschreibt die Anzahl der Tafeln Sportglück und $(12 - a) \cdot 45$ gibt die Kosten für $(12 - a)$ Tafeln Sportglück an.
c) Erste Umformung: Ausmultiplizieren der Klammer;
zweite Umformung: Vereinfachen
$a \cdot 55 - a \cdot 45 = a \cdot 10$ und $12 \cdot 45 = 540$;
dritte Umformung: durch Ausprobieren erhält man $a = 4$.
d) Timo kauft vier Tafeln Alpenstolz und acht Tafeln Sportglück.

Seite 124

16 a) für $x = 5$ gilt: $\frac{4}{(5+5)} = \frac{4}{10}$ und $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{8}{5} = \frac{16}{10}$;
Die Summe des Nenners wurde auseinandergerissen – diese Umformung ist falsch.
b) für $x = 1$ gilt: $5 + 2:(1 + 3) = 5{,}5$ und $\frac{2}{1} + 5\frac{2}{3} = 7\frac{2}{3}$;
Hier wurde das Distributivgesetz falsch angewendet. Hier kann man es nicht verwenden, die Division kann nur als Bruch geschrieben werden: $5 + \frac{2}{x+3}$
c) für $x = 0$ gilt: $10 \cdot (3 \cdot 0 + 2) + 0 = 20$ und $50 \cdot 0 + 0 = 0$. Hier wurde die Klammer falsch zusammengefasst: $3x + 2$ kann man aber nicht weiter zusammenfassen. Richtig wäre $10 \cdot (3x + 2) = 30x + 20 + x = 31x + 20$
d) für $x = 0$ gilt: $3 \cdot (0 - 2) - (0 - 6) = 0$ und $2 \cdot 0 = 0$ für $x = 2$ gilt: $3 \cdot (2 - 2) - (2 - 6) = 4$ und $2 \cdot 2 = 4$
Hier stimmen die Proben überein. Der erste Term und der dritte (letzte) Term sind auch äquivalent. Der mittlere Term ist zwar auch zu den anderen beiden äquivalent, aber dies ist Zufall. Hier wurde bei der ersten Umformung das Vorzeichen nicht richtig beachtet: Aus $3 \cdot (-2)$ wurde nicht -6 sondern $+6$. Da dieser Fehler in umgekehrter Form im hinteren Term ein zweites Mal vorkommt, heben sich beide Fehler zufälliger Weise gegenseitig auf.

17 a) Für die ersten 500 € erhält Guido $(5\% \cdot 500 = 25)$ 25 €. Für die restlichen 1600 € $(2100 - 500 = 1600)$ erhält er $(3\% \cdot 1600 = 48)$ 48 €. Insgesamt kann er also mit mindestens $(25 + 48 = 73)$ 73 € Finderlohn rechnen.
b) Für Beträge bis 500 €:
sei g der Geldbetrag und F der Finderlohn jeweils in €. Dann ist $F = \frac{5}{100} \cdot g$.
Für Beträge über 500 €:
Dann ist $F = 25 + \frac{3}{100} \cdot (g - 500)$. 25 ist der Finderlohn (in €) der ersten 500 € des Geldbetrages. $(g - 500)$ ist der Restbetrag. Mit $\frac{3}{100} \cdot (g - 500)$ bestimmt man den Finderlohn für diesen Restbetrag.
c) Mit der Formel aus b) ist:
$F = 25 + \frac{3}{100} \cdot (8000 - 500) = 250$
Das Vierfache von 250 € ist 1000 €.
Dieser Betrag ist $\frac{1000}{8000} = 12{,}5\,\%$ des Wertes des Diamanten.
d) 71 € ist über 25 €, womit der Betrag des Wertes des gefundenen Ringes über 500 € betragen muss. Die restlichen $(71 - 25 = 46)$ 46 € stammen demnach vom Mehrwert über 500 € des Ringes. 3 % des Mehrwertes sind 46 €. Der Mehrwert ist also $\left(\frac{46}{3} \cdot 100 \approx 1533{,}33\right)$ 1533,33 €. Der Wert des Rings beträgt ungefähr $(500 + 1530 = 2030)$ 2030 €.

18 a) Die Umrechnungen von Elvira und Kilian sind falsch. Markos Umrechnung ist richtig, aber sie ist wenig aussagekräftig, weil er zwei gleiche Zahlen voneinander abzieht.
Shans Umformung ist richtig und sie belegt durch dieses Gegenbeispiel, dass man das Kommutativgesetz nicht auf die Subtraktion übertragen kann.
b) Das Assoziativgesetz gilt ebenfalls nicht für die Subtraktion und die Division wie die beiden Gegenbeispiele zeigen:
$(80 - 7) - 13 = 73 - 13 = 60$; aber
$80 - (7 - 13) = 80 - (-6) = 86$
$(120:6):2 = 10$; aber $120:(6:2) = 120:3 = 40$.

19 a) Mögliche Beispiele:

$5 + 6 + 7 = 18$	ist durch 3 teilbar
$4 + 5 + 6 = 15$	ist durch 3 teilbar
$21 + 22 + 23 = 66$	ist durch 3 teilbar

Die Behauptung kann nur an einigen Beispielen überprüft werden. Für eine allgemeine Begründung müsste man alle existierenden Zahlen testen – dies ist unmöglich.
b) Sei n die erste der drei aufeinander folgenden Zahlen
- dann ist die Summe: $n + (n + 1) + (n + 2)$, vereinfacht ergibt sich $n + n + n + 1 + 2 = 3 \cdot (n + 1)$. Dividiert man die Summe durch 3, so erhält man die mittlere Zahl $n + 1$.

Es kann also keine Gegenbeispiele geben;
Jan muss einen Fehler gemacht haben.
c) Die Behauptung muss auch für negative Zahlen gelten, weil die Begründung mit Termen allgemein ist. Stichproben: $(-6) + (-5) + (-4) = -15$; $-15:3 = -5$. Der Unterschied besteht darin, dass das Ergebnis immer eine negative Zahl ist, wenn man drei negative Zahlen addiert.

20 Sei n die Zahl, dann wird die Summe mit dem Term $(n + 3) + 2 \cdot n$. Vereinfacht ergibt sich

$3 \cdot n + 3 = 3 \cdot (n + 1)$. Da sowohl $3 \cdot n$ als auch 3 durch 3 teilbar sind, ist auch die Summe $3 \cdot n + 3$ durch 3 teilbar, die Division durch 3 ergibt $n + 1$, die um Eins größere Zahl.

21 a) $5z + 3z = 8z$ b) $2z + 4 = 2(z + 2)$
c) $0{,}5z + 7 = 0{,}5(z + 14)$
d) $(z + 8) \cdot 3 - 20 = 3z + 4$

5 Gleichungen umformen – Äquivalenzumformungen

Seite 126

1 a) $8b = 3b + 5 \quad | -3b$
$5b = 5$
beide Gleichungen sind äquivalent
b) $7x - 2 = 3 - x \quad | +x$
$8x - 2 = 3 \quad | +2$
$8x = 5$
beide Gleichungen sind äquivalent
c) $5d + 10 = 2d + 16 \quad | -10$
$5d = 2d + 6 \quad | -2d$
$3d = 6 \quad | :3$
$d = 2$
beide Gleichungen sind äquivalent
d) $6n - 6 = 3 - 3n \quad | +3n \qquad 6n = 6 \quad | :2$
$9n - 6 = 3 \quad | +6 \qquad 3n = 3$
$9n = 9 \quad | :3$
$3n = 3$
damit sind beide Gleichungen äquivalent
e) $15 - 3x = 0 \quad | :3 \qquad 2x = 5 + x \quad | -2x$
$5 - x = 0 \qquad 0 = 5 - x$
$5 - x = 0$
also sind beide Gleichungen äquivalent
f) $2d + 3 - (+d) = -5d$
$2d + 3 - d = -5d \quad |$ vereinfachen
$d + 3 = -5d \quad | +5d$
$6d + 3 = 0$

$d + 4 = -2 - 11d \quad | +11d$
$12d + 4 = -2 \quad | +2$
$12d + 6 = 0 \quad | :2$
$6d + 3 = 0$
also sind beide Gleichungen äquivalent

Seite 127

2

a) $5x - 10 = 25 \quad | +10$
$5x = 35 \quad | :5$
$x = 7$

x	5x − 10
1	−5
10	40
9	35
8	30
7	25

b) $4k + 12 = 62 \quad | -12$
$4k = 50 \quad | :4$
$k = 12{,}5$

k	4k + 12
1	16
10	52
13	64
12	60
12,5	62

c) $3{,}4t + 83 = 100 \quad | -83$
$3{,}4t = 17 \quad | :3{,}4$
$t = 5$

t	3,4t + 83
1	86,4
10	117
5	100

d) $8b + 12 = 12 \quad | -12$
$8b = 0 \quad | :8$
$b = 0$

b	8b + 12
1	20
0	12

e) $5{,}5p + 10 = 26{,}5 \quad | -10$
$5{,}5p = 16{,}5 \quad | :5{,}5$
$p = 3$

p	5,5p + 10
1	15,5
10	65
2	21
3	26,5

f) $5 - 2{,}5y = 7{,}5 \quad | -5$
$-2{,}5y = 2{,}5 \quad | :(-2{,}5)$
$y = -1$

y	5 − 2,5y
1	2,5
2	0
−1	7,5

g) $0{,}1g + 8 = 18 \quad | -8$
$0{,}1g = 10 \quad | \cdot 10$
$g = 100$

g	0,1g + 8
1	8,1
10	9
100	18

h) $d \cdot (-3) = 15 \quad | :(-3)$
$d = -5$

d	d·(−3)
1	−3
5	−15
−5	15

c) Individuelle Lösung.

15 a) Die Variable a steht für die Anzahl der Tafeln.
b) $a \cdot 55$ stellt die Kosten für a Tafeln Alpenstolz dar. $(12 - a)$ beschreibt die Anzahl der Tafeln Sportglück und $(12 - a) \cdot 45$ gibt die Kosten für $(12 - a)$ Tafeln Sportglück an.
c) Erste Umformung: Ausmultiplizieren der Klammer;
zweite Umformung: Vereinfachen
$a \cdot 55 - a \cdot 45 = a \cdot 10$ und $12 \cdot 45 = 540$;
dritte Umformung: durch Ausprobieren erhält man $a = 4$.
d) Timo kauft vier Tafeln Alpenstolz und acht Tafeln Sportglück.

Seite 124

16 a) für $x = 5$ gilt: $\frac{4}{(5+5)} = \frac{4}{10}$ und $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{8}{5} = \frac{16}{10}$;
Die Summe des Nenners wurde auseinandergerissen – diese Umformung ist falsch.
b) für $x = 1$ gilt: $5 + 2:(1 + 3) = 5{,}5$ und $\frac{2}{1} + 5\frac{2}{3} = 7\frac{2}{3}$;
Hier wurde das Distributivgesetz falsch angewendet. Hier kann man es nicht verwenden, die Division kann nur als Bruch geschrieben werden: $5 + \frac{2}{x+3}$
c) für $x = 0$ gilt: $10 \cdot (3 \cdot 0 + 2) + 0 = 20$ und $50 \cdot 0 + 0 = 0$. Hier wurde die Klammer falsch zusammengefasst: $3x + 2$ kann man aber nicht weiter zusammenfassen. Richtig wäre $10 \cdot (3x + 2) = 30x + 20 + x = 31x + 20$
d) für $x = 0$ gilt: $3 \cdot (0 - 2) - (0 - 6) = 0$ und $2 \cdot 0 = 0$ für $x = 2$ gilt: $3 \cdot (2 - 2) - (2 - 6) = 4$ und $2 \cdot 2 = 4$
Hier stimmen die Proben überein. Der erste Term und der dritte (letzte) Term sind auch äquivalent. Der mittlere Term ist zwar auch zu den anderen beiden äquivalent, aber dies ist Zufall. Hier wurde bei der ersten Umformung das Vorzeichen nicht richtig beachtet: Aus $3 \cdot (-2)$ wurde nicht -6 sondern $+6$. Da dieser Fehler in umgekehrter Form im hinteren Term ein zweites Mal vorkommt, heben sich beide Fehler zufälliger Weise gegenseitig auf.

17 a) Für die ersten 500 € erhält Guido $(5\% \cdot 500 = 25)$ 25 €. Für die restlichen 1600 € $(2100 - 500 = 1600)$ erhält er $(3\% \cdot 1600 = 48)$ 48 €. Insgesamt kann er also mit mindestens $(25 + 48 = 73)$ 73 € Finderlohn rechnen.
b) Für Beträge bis 500 €:
sei g der Geldbetrag und F der Finderlohn jeweils in €. Dann ist $F = \frac{5}{100} \cdot g$.
Für Beträge über 500 €:
Dann ist $F = 25 + \frac{3}{100} \cdot (g - 500)$. 25 ist der Finderlohn (in €) der ersten 500 € des Geldbetrages. $(g - 500)$ ist der Restbetrag. Mit $\frac{3}{100} \cdot (g - 500)$ bestimmt man den Finderlohn für diesen Restbetrag.
c) Mit der Formel aus b) ist:
$F = 25 + \frac{3}{100} \cdot (8000 - 500) = 250$
Das Vierfache von 250 € ist 1000 €.
Dieser Betrag ist $\frac{1000}{8000} = 12{,}5\%$ des Wertes des Diamanten.
d) 71 € ist über 25 €, womit der Betrag des Wertes des gefundenen Ringes über 500 € betragen muss. Die restlichen $(71 - 25 = 46)$ 46 € stammen demnach vom Mehrwert über 500 € des Ringes. 3 % des Mehrwertes sind 46 €. Der Mehrwert ist also $\left(\frac{46}{3} \cdot 100 \approx 1533{,}33\right)$ 1533,33 €. Der Wert des Rings beträgt ungefähr $(500 + 1530 = 2030)$ 2030 €.

18 a) Die Umrechnungen von Elvira und Kilian sind falsch. Markos Umrechnung ist richtig, aber sie ist wenig aussagekräftig, weil er zwei gleiche Zahlen voneinander abzieht.
Shans Umformung ist richtig und sie belegt durch dieses Gegenbeispiel, dass man das Kommutativgesetz nicht auf die Subtraktion übertragen kann.
b) Das Assoziativgesetz gilt ebenfalls nicht für die Subtraktion und die Division wie die beiden Gegenbeispiele zeigen:
$(80 - 7) - 13 = 73 - 13 = 60$; aber
$80 - (7 - 13) = 80 - (-6) = 86$
$(120:6):2 = 10$; aber $120:(6:2) = 120:3 = 40$.

19 a) Mögliche Beispiele:

$5 + 6 + 7 = 18$	ist durch 3 teilbar
$4 + 5 + 6 = 15$	ist durch 3 teilbar
$21 + 22 + 23 = 66$	ist durch 3 teilbar

Die Behauptung kann nur an einigen Beispielen überprüft werden. Für eine allgemeine Begründung müsste man alle existierenden Zahlen testen – dies ist unmöglich.
b) Sei n die erste der drei aufeinander folgenden Zahlen
- dann ist die Summe: $n + (n + 1) + (n + 2)$, vereinfacht ergibt sich $n + n + n + 1 + 2 = 3 \cdot (n + 1)$. Dividiert man die Summe durch 3, so erhält man die mittlere Zahl $n + 1$.

Es kann also keine Gegenbeispiele geben; Jan muss einen Fehler gemacht haben.
c) Die Behauptung muss auch für negative Zahlen gelten, weil die Begründung mit Termen allgemein ist. Stichproben: $(-6) + (-5) + (-4) = -15$; $-15:3 = -5$. Der Unterschied besteht darin, dass das Ergebnis immer eine negative Zahl ist, wenn man drei negative Zahlen addiert.

20 Sei n die Zahl, dann wird die Summe mit dem Term $(n + 3) + 2 \cdot n$. Vereinfacht ergibt sich

$3 \cdot n + 3 = 3 \cdot (n + 1)$. Da sowohl $3 \cdot n$ als auch 3 durch 3 teilbar sind, ist auch die Summe $3 \cdot n + 3$ durch 3 teilbar, die Division durch 3 ergibt $n + 1$, die um Eins größere Zahl.

21 a) $5z + 3z = 8z$ b) $2z + 4 = 2(z + 2)$
c) $0{,}5z + 7 = 0{,}5(z + 14)$
d) $(z + 8) \cdot 3 - 20 = 3z + 4$

5 Gleichungen umformen – Äquivalenzumformungen

Seite 126

1 a) $8b = 3b + 5 \quad |-3b$
$5b = 5$
beide Gleichungen sind äquivalent
b) $7x - 2 = 3 - x \quad |+x$
$8x - 2 = 3 \quad |+2$
$8x = 5$
beide Gleichungen sind äquivalent
c) $5d + 10 = 2d + 16 \quad |-10$
$5d = 2d + 6 \quad |-2d$
$3d = 6 \quad |:3$
$d = 2$
beide Gleichungen sind äquivalent
d) $6n - 6 = 3 - 3n \quad |+3n$
$9n - 6 = 3 \quad |+6$
$9n = 9 \quad |:3$
$3n = 3$
$6n = 6 \quad |:2$
$3n = 3$
damit sind beide Gleichungen äquivalent
e) $15 - 3x = 0 \quad |:3$
$5 - x = 0$
$2x = 5 + x \quad |-2x$
$0 = 5 - x$
$5 - x = 0$
also sind beide Gleichungen äquivalent
f) $2d + 3 - (+d) = -5d$
$2d + 3 - d = -5d \quad |$vereinfachen
$d + 3 = -5d \quad |+5d$
$6d + 3 = 0$

$d + 4 = -2 - 11d \quad |+11d$
$12d + 4 = -2 \quad |+2$
$12d + 6 = 0 \quad |:2$
$6d + 3 = 0$
also sind beide Gleichungen äquivalent

Seite 127

2
a) $5x - 10 = 25 \quad |+10$
$5x = 35 \quad |:5$
$x = 7$

x	5x − 10
1	−5
10	40
9	35
8	30
7	25

b) $4k + 12 = 62 \quad |-12$
$4k = 50 \quad |:4$
$k = 12{,}5$

k	4k + 12
1	16
10	52
13	64
12	60
12,5	62

c) $3{,}4t + 83 = 100 \quad |-83$
$3{,}4t = 17 \quad |:3{,}4$
$t = 5$

t	3,4t + 83
1	86,4
10	117
5	100

d) $8b + 12 = 12 \quad |-12$
$8b = 0 \quad |:8$
$b = 0$

b	8b + 12
1	20
0	12

e) $5{,}5p + 10 = 26{,}5 \quad |-10$
$5{,}5p = 16{,}5 \quad |:5{,}5$
$p = 3$

p	5,5p + 10
1	15,5
10	65
2	21
3	26,5

f) $5 - 2{,}5y = 7{,}5 \quad |-5$
$-2{,}5y = 2{,}5 \quad |:(-2{,}5)$
$y = -1$

y	5 − 2,5y
1	2,5
2	0
−1	7,5

g) $0{,}1g + 8 = 18 \quad |-8$
$0{,}1g = 10 \quad |\cdot 10$
$g = 100$

g	0,1g + 8
1	8,1
10	9
100	18

h) $d \cdot (-3) = 15 \quad |:(-3)$
$d = -5$

d	d·(−3)
1	−3
5	−15
−5	15

i) $\frac{1}{2}a + 6 = 13 \quad | -6$
$\frac{1}{2}a = 7 \quad | \cdot 2$
$a = 14$

a	$\frac{1}{2}a + 6$
1	6,5
10	11
11	11,5
15	13,5
14	13

j) $\frac{1}{4} - x = \frac{3}{4} \quad | -\frac{1}{4}$
$-x = \frac{2}{4} \quad | \cdot(-1)$
$x = -\frac{1}{2}$

x	$\frac{1}{4} - x$
1	$-\frac{3}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

k) $\frac{3}{4} = \frac{1}{4}b + 3 \quad | \cdot 4$
$3 = b + 12 \quad | -12$
$-9 = b$

b	$\frac{1}{4}b + 3$
1	3,25
−1	$2\frac{3}{4}$
−10	0,5
−8	1
−9	$\frac{3}{4}$

l) $7 - \frac{1}{2}x = 1 \quad | -7$
$-\frac{1}{2}x = -6 \quad | \cdot(-2)$
$x = 12$

x	$7 - \frac{1}{2}x$
1	6,5
10	2
11	1,5
12	1

Insgesamt gibt es Aufgaben, bei denen das systematische Probieren schneller geht, meistens wenn die Lösung ganzzahlig ist. Ist dies nicht der Fall, führen die Äquivalenzumformungen häufig schneller zur Lösung.

3

a) $9b + 3 = 7b + 11 \quad | -7b$
$2b + 3 = 11 \quad | -3$
$2b = 8 \quad | :2$
$b = 4$

b) $5 + 7x = 45 + 3x \quad | -3x$
$5 + 4x = 45 \quad | -5$
$4x = 40 \quad | :4$
$x = 10$

c) $5d + 4 = 4 + d \quad | -d$
$4d + 4 = 4 \quad | -4$
$4d = 0 \quad | :4$
$d = 0$

d) $16v + 7 = 15v + 1 \quad | -15v$
$v + 7 = 1 \quad | -7$
$v = -6$

e) $8n - 15 = 3n \quad | -3n$
$5n - 15 = 0 \quad | +15$
$5n = 15 \quad | :5$
$n = 3$

f) $12k = 15k - 60 \quad | -15k$
$-3k = -60 \quad | :(-3)$
$k = 20$

g) $5{,}5 + 3t = t - 2{,}5 \quad | -t$
$5{,}5 + 2t = -2{,}5 \quad | -5{,}5$
$2t = -8 \quad | :2$
$t = -4$

h) $5{,}5z = -9 + 4{,}5z \quad | -4{,}5z$
$z = -9$

i) $\frac{1}{2}a + 6 = 13 - a \quad | +a$
$\frac{3}{2}a + 6 = 13 \quad | -6$
$\frac{3}{2}a = 7 \quad | \cdot\frac{2}{3}$
$a = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$

j) $6 - \frac{1}{2}x = 1 + 2x \quad | +\frac{1}{2}x$
$6 = 1 + 2\frac{1}{2}x \quad | -1$
$5 = \frac{5}{2}x \quad | \cdot\frac{2}{5}$
$2 = x$

k) $\frac{3}{4}b = \frac{1}{4}b + 3 \quad | -\frac{1}{4}b$
$\frac{2}{4}b = 3 \quad | \cdot 2$
$b = 6$

l) $(-\frac{1}{4})\cdot x = \frac{3}{4}x - 1 \quad | +\frac{1}{4}x$
$0 = x - 1 \quad | +1$
$1 = x$

Man kann diese Aufgaben nicht durch rückwärts Rechnen lösen, weil auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens eine Variable steht.

4

$2b - 3 = 3b + 1$	$\Rightarrow b = -4$
$10 - n = 23$	$\Rightarrow n = -13$
$6d + 2(d - 13) = d \cdot 5 - 5$	$\Rightarrow d = 7$
$5 \cdot (b + 3) = 25$	$\Rightarrow b = 2$
$8 + 0{,}5x = 2{,}5x$	$\Rightarrow x = 4$
$(v - 5) \cdot 3 + 5v + 3 = 4v$	$\Rightarrow v = 3$
$\frac{4}{7}b = -8$	$\Rightarrow b = -14$
$x : 8 = 5$	$\Rightarrow x = 40$
$2 \cdot (x + 1) = 10$	$\Rightarrow x = 4$
$3{,}5 \cdot (x + 1) = 10{,}5$	$\Rightarrow x = 2$
$(-\frac{3}{4} + k) \cdot 2 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$	$\Rightarrow k = \frac{1}{4}$

5 a) $15 = 3x \quad | -3x$
$15 - 3x = 0 \quad | -15$
$-3x = -15 \quad | :(-3)$
$x = 5$

b) Karl wollte, dass das x auf der linken Seite des Gleichheitszeichens steht, damit er am Ende die Lösung „x = …" schreiben kann. Die ersten beiden Umformungen hätte man auch umgehen können, indem man die Terme auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens der Gleichung vertauscht: $15 = 3x$ und $3x = 15$ sind äquivalent. Nun muss man auch nicht durch eine negative Zahl dividieren, um x auszurechnen.

6 a) Beide erhalten die Lösung $t = 6$.
b) Wenn man beim Rechnen mit Brüchen Schwierigkeiten hat, wäre der rechte Weg einfacher, weil man hier das Rechnen mit Brüchen umgeht.
c) mögliche Lösungen:

1. Weg:
$$\begin{aligned} 2 + \tfrac{1}{3}x &= \tfrac{2}{3}x + 4 && \mid -\tfrac{1}{3}x \\ 2 &= \tfrac{1}{3}x + 4 && \mid -4 \\ -2 &= \tfrac{1}{3}x && \mid \cdot 3 \\ -6 &= x \end{aligned}$$

2. Weg:
$$\begin{aligned} 2 + \tfrac{1}{3}x &= \tfrac{2}{3}x + 4 && \mid -\tfrac{2}{3}x \\ 2 - \tfrac{1}{3}x &= 4 && \mid -2 \\ -\tfrac{1}{3}x &= 2 && \mid \cdot(-3) \\ x &= -6 \end{aligned}$$

3. Weg:
$$\begin{aligned} 2 + \tfrac{1}{3}x &= \tfrac{2}{3}x + 4 && \mid \cdot 3 \\ 6 + x &= 2x + 12 && \mid -x \\ 6 &= x + 12 && \mid -12 \\ -6 &= x \end{aligned}$$

Bei allen drei Wegen benötigt man drei Rechenschritte. Beim 3. Weg umgeht man die Bruchrechnung, in dem die Brüche zu ganzen Zahlen erweitert werden.

7

a)
$$\begin{aligned} 32x + 43 - 20x &= -25 - 45x + 30 && \mid \text{vereinfachen} \\ 12x + 43 &= -45x + 5 && \mid +45x \\ 57x + 43 &= 5 && \mid -43 \\ 57x &= -38 && \mid :57 \\ x &= -\tfrac{38}{57} = -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Probe:
LS: $32 \cdot \left(-\frac{38}{57}\right) + 43 - 20 \cdot \left(-\frac{38}{57}\right) = -21\frac{1}{3} + 43 + 13\frac{1}{3} = 35$

RS: $-25 - 45 \cdot (-\frac{38}{57}) + 30 = 5 + 30 = 35$

b)
$$\begin{aligned} 12 - 9b + 15 - 5b &= 14 - 8b + 6 && \mid \text{vereinfachen} \\ 27 - 14b &= 20 - 8b && \mid +14b \\ 27 &= 20 + 6b && \mid -20 \\ 7 &= 6b && \mid :6 \\ \tfrac{7}{6} &= b \end{aligned}$$

Probe: LS: $12 - 9 \cdot \frac{7}{6} + 15 - 5 \cdot \frac{7}{6} = 10\frac{2}{3}$

RS: $14 - 8 \cdot \frac{7}{6} + 6 = 10\frac{2}{3}$

c)
$$\begin{aligned} -41 + 26t &= 2t + 20t - 53 + 72 && \mid \text{vereinfachen} \\ -41 + 26t &= 22t + 19 && \mid -22t \\ -41 + 4t &= 19 && \mid +41 \\ 4t &= 60 && \mid :4 \\ t &= 15 \end{aligned}$$

Probe: LS: $-41 + 26 \cdot 15 = 349$

RS: $2 \cdot 15 + 20 \cdot 15 - 53 + 72 = 349$

d)
$$\begin{aligned} 4f + 49 - 13f - 78 + 23f &= 0 && \mid \text{vereinfachen} \\ 14f - 29 &= 0 && \mid +29 \\ 14f &= 29 && \mid :14 \\ f &= \tfrac{29}{14} = 2\tfrac{1}{14} \end{aligned}$$

Probe: LS: $4 \cdot \frac{29}{14} + 49 - 13 \cdot \frac{29}{14} - 78 + 23 \cdot \frac{29}{14} = 0$

e)
$$\begin{aligned} 3 \cdot (a - 4) + 3 \cdot (4 - a) + 2a - 1 &= 3 && \mid \text{erstes Vereinfachen} \\ 3a - 12 + 12 - 3a + 2a - 1 &= 3 && \mid \text{vereinfachen} \\ 2a - 1 &= 3 && \mid +1 \\ 2a &= 4 && \mid :2 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Probe: LS:
$3 \cdot (2 - 4) + 3 \cdot (4 - 2) + 2 \cdot 2 - 1 = -6 + 6 + 4 - 1 = 3$

f)
$$\begin{aligned} 13 \cdot (s - 5) - 4 \cdot (s - 1) + s &= 5 && \mid \text{Ausmultiplizieren} \\ 13s - 65 - 4s + 4 + s &= 5 && \mid \text{vereinfachen} \\ 10s - 61 &= 5 && \mid +61 \\ 10s &= 66 && \mid :18 \\ s &= \tfrac{66}{10} = 6\tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

Probe: LS: $13 \cdot \left(\frac{33}{5} - 5\right) - 4\left(\frac{33}{5} - 1\right) + \frac{33}{5}$
$= 13 \cdot \left(\frac{8}{5}\right) - 4 \cdot \left(\frac{28}{5}\right) + \frac{33}{5}$
$= \frac{104}{5} - \frac{112}{5} + \frac{33}{5} = 5$

g)
$$\begin{aligned} 3 \cdot (2x - 5) + 6 &= 5 \cdot (3 - 5x) + 6x && \mid \text{Ausmultiplizieren} \\ 6x - 15 + 6 &= 15 - 25x + 6x && \mid \text{vereinfachen} \\ 6x - 9 &= 15 - 19x && \mid +19x \\ 25x - 9 &= 15 && \mid +9 \\ 25x &= 24 && \mid :25 \\ x &= \tfrac{24}{25} \end{aligned}$$

Probe: LS: $3 \cdot \left(2 \cdot \frac{24}{25} - 5\right) + 6 = -3{,}24$

RS: $5 \cdot \left(3 - 5 \cdot \frac{24}{25}\right) + 6 \cdot \frac{24}{25} = -3{,}24$

h)
$$\begin{aligned} 4 \cdot (v + 3) - 5 \cdot (3v - 8) &\\ = 12 - 2 \cdot (3v + 1) & && \mid \text{Ausmultiplizieren} \\ 4v + 12 - 15v + 40 &= 12 - 6v - 2 && \mid \text{vereinfachen} \\ -11v + 52 &= 10 - 6v && \mid +6v \\ -5v + 52 &= 10 && \mid -52 \\ -5v &= -42 && \mid :(-5) \\ v &= \tfrac{42}{5} = 8\tfrac{2}{5} = 8{,}4 \end{aligned}$$

Probe: LS: $4 \cdot (8{,}4 + 3) - 5 \cdot (3 \cdot 8{,}4 - 8) = -40{,}4$

RS: $12 - 2 \cdot (3 \cdot 8{,}4 + 1) = -40{,}4$

Seite 128

8 a) $x = \frac{44}{9}$ b) $x = \frac{15}{2}$ c) $x = \frac{82}{29}$ d) $x = -\frac{17}{106}$

9 a) richtig b) richtig
c) richtig d) falsch

10 a) $4l = 50$, also $l = 12{,}5\,m$
b) $2l + 2(l + 3) = 4l + 6 = 50$, also $l = 11\,m$
c) $2(l + 1) + 2l + 2 = 4l + 4 = 50$, also $l = 11{,}5\,m$
d) $2l + l + 1 + 3 = 3l + 4 = 50$, also $l \approx 15{,}33\,m$

11 a)
$$\begin{aligned} s+6+s+4 &= s+4+s+s+s && |\text{vereinfachen}\\ 2s+10 &= 4s+4 && |-2s\\ 10 &= 2s+4 && |-4\\ 6 &= 2s && |:2\\ 3 &= s \end{aligned}$$
Die Seitenlänge s beträgt 3 Einheiten.

b) $5+s+5+s =$
$$\begin{aligned} s+2s-1+s+2+s+3+4 & && |\text{ vereinfachen}\\ 2\cdot s+10 &= 5\cdot s+8 && |-2s\\ 10 &= 3\cdot s+8 && |-8\\ 2 &= 3\cdot s && |:3\\ \tfrac{2}{3} &= s \end{aligned}$$
Die Seitenlänge von s beträgt $\frac{2}{3}$ Längeneinheiten.

12 a) $400 - 35m$ beschreibt den Kontostand von Shanon, da sie anfangs 400 € auf ihrem Konto hat und monatlich 35 € abgezogen werden (Reitstunden).

b) Zur Beantwortung muss man die Gleichung lösen:
$$\begin{aligned} 400-35m &= 150+15m && |+35m\\ 400 &= 150+50m && |-150\\ 250 &= 50m && |:50\\ 5 &= m \end{aligned}$$
Nach 5 Monaten haben Kilian und Shanon gleich viel Geld auf ihrem Konto. Der Kontostand beträgt dann $(150 + 15\cdot 5 = 225)$ 225 €.

13

$\frac{1}{2}$: $20 = 5(3{,}5 + x)$
$\frac{1}{2}\cdot x = \frac{1}{4}$

$-\frac{3}{4}$: $(4\cdot x + 2)\cdot 3 = -3$
$x + 6 + x = 4{,}5$

4: $2\cdot x + 3 = 11$
$(x - 2)\cdot 5 = 10$

7: $x\cdot 10 - 15 = x + 48$
$(2 - x)\cdot 3 = -22 + x$

−5: $2\cdot(x + 3) = -4$

−2: $3\cdot(x + 5) + 1 = -5\cdot x$
$24 = -4\cdot x + 4$
$\frac{1}{2}\cdot x = -1$

3,5: $x + 2\cdot x = 14 - x$
$4\cdot(x - 0{,}5) = 12$

−1,7: $10\cdot(-x) = 17$
$x + x = -3{,}4$

25: $4x = 100$
$3x + 10 = x + 60$

2,55: $100x = 255$
$10x + 0{,}5 = 26$

8: $3x = 2x + 8$
$x + 7 + x = 30 - x + 1$

11,5: $10x + 5 = 120$
$24 = x\cdot 2 + 1$

−12: $-10x = 120$
$x + 30 = 2x + 42$

Seite 129

14 a)
$$\begin{aligned} 4z+26 &= 6\cdot z && |-4z\\ 26 &= 2z && |:2\\ 13 &= z \end{aligned}$$
Guido hat sich die Zahl 13 gedacht.
Im zweiten Schritt wurde die rechte Seite des Gleichheitszeichens nicht durch 2 geteilt.

b) Ich denke mir eine Zahl. Diese Zahl verdreifache ich, subtrahiere sieben und multipliziere das Ergebnis mit vier. Das erhaltene Ergebnis ist genauso groß wie das Achtfache der gedachten Zahl. Antwort: $(3\cdot z - 7)\cdot 4 = 8\cdot z$, also $z = 7$
Die gedachte Zahl war 7 (mögliche Schülerantwort).

15 a) Im ersten Schritt müssen 12 subtrahiert werden:
$$\begin{aligned} 12+2b &= 22 && |-12\\ 2b &= 10 && |:2\\ b &= 5 \end{aligned}$$
Im zweiten Schritt wurde die rechte Seite des Gleichheitszeichens nicht durch 2 geteilt.

b) Im zweiten Schritt muss man ein d auf beiden Seiten subtrahieren und nicht durch d dividieren.
$$\begin{aligned} 2d+3 &= d+3 && |-3\\ 2d &= d && |-d\\ d &= 0 \end{aligned}$$
c) Im ersten Schritt wurde falsch ausmultipliziert und im letzten Schritt wurde x auf der linken Seite der Gleichung falsch subtrahiert.
$$\begin{aligned} -2(x+3) &= x && |\text{vereinfachen}\\ -2x-6 &= x && |+6\\ -2x &= x+6 && |-x\\ -3x &= 6 && |:(-3)\\ x &= -2 \end{aligned}$$
d) Im ersten Schritt wurde auf der rechten Seite falsch ausmultipliziert und die Äquivalenzumformungen im zweiten Schritt wurden falsch durchgeführt:
$$\begin{aligned} 3\cdot(2-s) &= 2s-(s+6) && |\text{vereinfachen}\\ 6-3s &= s-6 && |+6+3s\\ 12 &= 4s && |:4\\ 3 &= s \end{aligned}$$

16 a) und b)
Sei h die Anzahl der Hölzer in einer blauen Box.
Situation A:
$4h + 1 = 2h + 4$, also $h = 3{,}5$. Demnach liegen in einer blauen Box 7 halbe Hölzer.
Situation B:
$h + 5 = 4h + 1{,}5$, also $h = 1\frac{1}{6}$. Demnach liegen in einer blauen Box 7 Hölzer der Länge $\frac{1}{6}$ eines ganzen Hölzchens.
Man kann die Lösungen auch zunächst durch Ausprobieren erhalten.
c) Individuelle Lösung.

17 a)
$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 7 \quad &&|-3 \\ 2x &= 4 &&|:2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$
Probe: $2 \cdot 2 + 3 = 7$

$$\begin{aligned} 3x - 7 &= x + 1 \quad &&|+7 \\ 3x &= x + 8 &&|-x \\ 2x &= 8 &&|:2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$
Probe: $3 \cdot 4 - 7 = 5 = 4 + 1$
Der Fehler von Rolf lag darin, dass er mit 0 multipliziert hat.
b) Die Behauptung ist richtig, denn jeder Term, der mit Null multipliziert wird, ergibt Null. Demnach erhält man mithilfe dieser Umformung nicht die Lösungen einer Gleichung. Daher ist diese Umformung auch keine Äquivalenzumformung.

6 Lösen von Problemen mit Strategien

Seite 132

1 a) Susannes Freundin meint, dass sich der Abstand zwischen dem Alter von Susanne und dem Alter ihrer Mutter von gut 32 Jahren mit jedem Jahr verringert. Dies ist falsch, denn der Abstand bleibt immer derselbe.
b) Sei a die Anzahl der Jahre, bis die Mutter doppelt so alt ist wie ihre Tochter Susanne.
Dann ist: $(13 + a) \cdot 2 = 45 + a$, denn in a Jahren ist Susanne $13 + a$ und ihre Mutter $45 + a$ Jahre alt. Dann soll Susannes Mutter doppelt so alt sein wie Susanne.
Auflösen der Gleichung ergibt:
$$\begin{aligned} (13 + a) \cdot 2 &= 45 + a \\ 26 + 2a &= 45 + a \\ a &= 19 \end{aligned}$$
In 19 Jahren ist Susanne 32 und ihre Mutter 64 Jahre alt, demnach ist die Forderung erfüllt.

2 Die Situation kann mit der Gleichung $75 + 14 \cdot k = 650$ beschrieben werden, wobei k die Anzahl der Wasserkisten beschreibt. Durch Auflösen erhält man $k \approx 41{,}07$. Also darf Fritz nicht mehr als 41 Kisten transportieren.

3 Die Situation kann mit der Gleichung $3 \cdot p = 20 - 11{,}03$ dargestellt werden, wobei p die Anzahl der Pakete beschreibt. Umgeformt ergibt sich: $p = 2{,}99$. Somit kostet ein Paket CD-Rohlinge 2,99 €.

4
- Der Vater fährt mit 1300 m pro Minute. Sei t die Anzahl der Minuten, dann legt der Vater in t Minuten $1300 \cdot t$ Meter Wegstrecke zurück.
- Phillip legt in t Minuten $85 \cdot t$ Meter Wegstrecke zurück.
- Beide zusammen sollen 12 km = 12 000 m zurücklegen, also: $1300 \cdot t + 85 \cdot t = 12\,000$
$$\begin{aligned} 1385 \cdot t &= 12\,000 \quad |:1385 \\ t &\approx 8{,}66 \end{aligned}$$

Beide treffen sich nach ca. 8,66 Minuten (8 Minuten 40 Sekunden).
b) Nach ca. 8,66 Minuten hat Phillip $85 \cdot 8{,}66 \approx 736{,}5$ Meter zurückgelegt.
Das sind $\frac{736{,}5}{12\,000} \approx 0{,}0614$, also ca. 6,14 % des Gesamtweges.
c) $1300\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 78\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ist zu prüfen $\quad$ 1 km = 1000 m; 1 h = 60 min
also $78\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 78 \cdot \frac{1000\,\text{m}}{60\,\text{min}} = 1300\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$

5 a) $n + (n + 1) + (n + 2) = 81$
$n = 26$; Es sind die Zahlen 26, 27, 28.
b) (1) $x - y = 70$ und (2) $3x = 4y$
aus (1): $x = 70 + y$
einsetzen in (2): $3(70 + y) = 4y$
$$\begin{aligned} 210 + 3y &= 4y \\ y &= 210 \end{aligned}$$
einsetzen in (1): $x - 210 = 70$
$$x = 280$$

Seite 133

6 Sei s die Länge einer Seite des Würfels. Dann benötigt Klaus für ein Paket die Klebebandlänge:
$6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s\right) + 3 \cdot s = 6 \cdot s$.

Pro Paket hat er $160\,\text{m} : 70 \approx 2{,}29\,\text{m}$ Klebeband zur Verfügung.
Also: $6 \cdot s \approx 2{,}29$
$s \approx 0{,}38$, demnach ist eine Seitenlänge des Würfels ca. 38 cm lang.

7 Aus den Informationen ergibt sich die Gleichung: $300 = 100 \cdot 0{,}80 + 200 \cdot p$, wobei p der neue Preis der Würstchen in € beschreibt. Der Term $200 \cdot p$ ergibt sich aus folgenden Überlegungen: Wenn schon 100 Würstchen verkauft wurden, bleiben noch 200 übrig, die zu dem neuen Preis p verkauft werden können. Insgesamt müssen alle Einnahmen 300 € ergeben.
Durch Auflösen erhält man: $p = 1{,}10$. Also müssen die restlichen 200 Würstchen für 1,10 € verkauft werden, damit die Kosten gedeckt werden.

8
- Florian läuft entgegen der Rollrichtung 4 Stufen pro Sekunde.
- Die Rolltreppe fährt 115 Stufen in 45 Sekunden, also $2,\overline{5}$ Stufen pro Sekunde.
- Da sich beide Bewegungen gegenseitig „aufheben", ergibt sich pro Sekunde eine effektive Laufleistung von $4 - 2,\overline{5} = 1,\overline{4}$ Stufen pro Sekunde.
- Sei t die Zeit in Sekunden, bis Florian unten angekommen ist, dann gilt
  $1,\overline{4} \cdot t = 115$, also $t \approx 79{,}6$.

Demnach braucht Florian ca. 80 Sekunden, bis er entgegen der Rolltreppenlaufrichtung unten angekommen ist.

9 a)
$$
\begin{aligned}
[(4z + 14) \cdot 2 - z] : 7 &= z + 4 \quad | \cdot 7\\
(4z + 14) \cdot 2 - z &= 7 \cdot z + 28\\
8z + 28 - z &= 7z + 28\\
7z + 28 &= 7z + 28 \quad | -28\\
7z &= 7z \quad | :7\\
z &= z
\end{aligned}
$$
Diese Gleichung ist für alle Zahlen erfüllt, denn $z = z$ gilt immer.
b)
- Vierfache einer Zahl: $4 \cdot z$
- addiere dann 14: $4 \cdot z + 14$
- verdopple das Ergebnis: $(4 \cdot z + 14) \cdot 2$
- ziehe die gedachte Zahl wieder ab: $(4 \cdot z + 14) \cdot 2 - z$
- das Ergebnis durch 7 dividieren: $[(4 \cdot z + 14) \cdot 2 - z] : 7$

$\Rightarrow [(4z + 14) \cdot 2 - z] : 7$ durch Termumformungen
$= [8z + 28 - z] : 7$
$= [7z + 28] : 7$
$= z + 4$

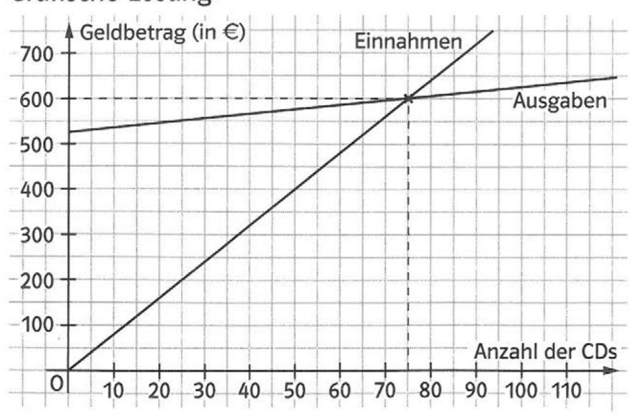
Auf der linken Seite der Gleichung (die auszuführende Rechenvorschrift) steht ein komplex erscheinender Term. Wenn man diesen vereinfacht, erhält man den einfachen Term $z + 4$. Beide Terme sind äquivalent. Daher muss man von dem genannten Endergebnis 4 abziehen, um die Zahl z zu erhalten.
c) Beispiel für individuelle Lösung
$[(5 \cdot z - 8) \cdot 3 + z] : 8 = 2z - 3$
„Verfünffache die gedachte Zahl, ziehe 8 ab und multipliziere das Ergebnis mit 3. Addiere dann die gedachte Zahl und dividiere durch 8."
Beim erhaltenen Endergebnis muss man 3 addieren und dann halbieren, um die gedachte Zahl zu erhalten.

10 a) $0{,}5\,\text{kg} \triangleq 100\,\%$
$0{,}01\,\text{kg} \triangleq 2\,\%$ Fruchtfleisch
Nach einer gewissen Lagerzeit:
$0{,}01\,\text{kg} \triangleq 4\,\%$, da sich der Fruchtfleischanteil verdoppelt hat. Die Fruchtfleischmasse bleibt aber konstant, weil nur das Wasser verdunstet.
$\downarrow \cdot 25 \qquad \downarrow \cdot 25$
$0{,}25\,\text{kg} \triangleq 100\,\%$
Die Gurke wiegt jetzt 0,25 kg.
$W = 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}01\,\text{kg}$ $\qquad G = 0{,}5\,\text{kg};\ p = 2\,\%$
Der neue Grundwert entspricht der neuen Masse der Gurke:
$G = 0{,}01 : 0{,}04 = 0{,}25\,\text{kg}$ $\qquad W = 0{,}01\,\text{kg};\ p = 4\,\%$
b) $0{,}01\,\text{kg} \triangleq 6\,\% \Rightarrow 0{,}17\,\text{kg} \triangleq 100\,\%$
Die Gurke wiegt $\frac{1}{3}$ ihres ursprünglichen Gewichts.

11 Sei g das Gewicht des Fisches in Pfund und a der %-Anteil des Mittelstückes des Fisches:
$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + a = 1$, also $a = \frac{5}{12}$ oder $\frac{1}{3}g + \frac{1}{4}g + 10 = g$
Also: $\frac{5}{12} \triangleq 10$ Pfund $\qquad \frac{7}{12}g + 10 = g$
$1 \triangleq 24$ Pfund $= g$ $\qquad 10 = \frac{5}{12}g$
$24 = g$
Der Fisch wiegt demnach insgesamt 24 Pfund.

Seite 134

12 a) Die Informationen ergeben die Gleichung $525 + 1 \cdot c = 8 \cdot c$, wobei c die Anzahl der CDs beschreibt. Auf der linken Seite des Gleichheitszeichens stehen sämtliche Kosten und auf der rechten Seite die Einnahmen jeweils pro CD. Durch Auflösen erhält man: $c = 75$. Demnach muss Tara mindestens 76 CDs verkaufen, damit die Einnahmen größer sind als die Ausgaben.
Grafische Lösung:



Am Schnittpunkt beider Geraden erkennt man, wann Einnahmen und Ausgaben gleich sind. Auch hier ist die Lösung $c = 75$.
b) Durch systematisches Ausprobieren oder durch rückwärts Rechnen erkennt man, dass sie ca. 1504 CDs verkaufen muss, damit sie 10 000 € verdient. Auch durch eine Rechnung kann man dies bestätigen:
Einnahmen bei 1504 verkauften CDs:
$8 \cdot 1504 = 12\,032$
Ausgaben bei 1504 verkauften CDs:
$525 + 1 \cdot 1504 = 2029$
$12\,032 - 2029 = 10\,003$
Sie verdient dann also 10 003 €.

13 a) $K = 0{,}95 + 0{,}10 \cdot a$. Mit $a = 36$ folgt:
$K = 0{,}95 + 0{,}10 \cdot 36 = 4{,}55$
Andrea muss 4,55 € für den Film bezahlen.
Hierbei beschreibt K die Kosten in € und a die Anzahl der Bilder.
b) Die Formel für das Format 10×15 für einen Film lautet: $K = 0{,}95 + 0{,}15 \cdot a$.
Für vier Filme erhöht sich die Filmentwicklung:
$K = 4 \cdot 0{,}95 + 0{,}15 \cdot a$.
Mit $K = 23{,}3$ hat man die Gleichung
$23{,}3 = 4 \cdot 0{,}95 + 0{,}15 \cdot a$. Nun löst man nach a auf, um die Anzahl der Bilder zu erhalten:
$23{,}3 = 4 \cdot 0{,}95 + 0{,}15 \cdot a \quad |-(4 \cdot 0{,}95)$
$19{,}5 = 0{,}15 \cdot a \quad |:0{,}15$
$130 = a$
Melanie hat demnach 130 Bilder entwickeln lassen.
Also hat sie $(4 \cdot 36 - 130 = 14)$ 14 Bilder zurückgegeben.
c) Die Formeln für 2 Filme lauten:
$K_{9\times13} = 2 \cdot 0{,}95 + 0{,}1 \cdot a$
$K_{10\times15} = 2 \cdot 0{,}95 + 0{,}15 \cdot a$
Mit $a = 2 \cdot 36 = 72$ folgt:
$K_{9\times13} = 1{,}9 + 0{,}1 \cdot 72 = 9{,}1$
$K_{10\times13} = 1{,}9 + 0{,}15 \cdot 72 = 12{,}7$
Da beide Gleichungen nicht den Preis von 11,65 € ergeben, hat Klaus Bilder zurückgegeben.
Also: $K_{9\times13}$: $1{,}9 + 0{,}1 \cdot a = 11{,}65 \quad |-1{,}9$
$0{,}1 \cdot a = 9{,}75 \quad |:0{,}1$
$a = 97{,}5$
$K_{10\times13}$: $1{,}9 + 0{,}15 \cdot a = 11{,}65 \quad |-1{,}9$
$0{,}15 \cdot a = 9{,}75 \quad |:0{,}15$
$a = 65$
Da man nur ganze Bilder entwickeln lassen kann, hat Klaus das Format 10×15 gewählt und $(2 \cdot 36 - 65 = 7)$ 7 Bilder zurückgegeben.

14 a) $\left.\begin{array}{ll}\text{Wanne A:} & 20 + 0{,}6 \cdot m \\ \text{Wanne B:} & 10 + 1{,}6 \cdot m\end{array}\right\}$ m steht für die Anzahl der Minuten
$20 + 0{,}6 \cdot m = 10 + 1{,}6m \quad |-10 - 0{,}6m$
$10 = 1m$
Nach 10 Minuten sind beide Wannen gleich hoch gefüllt.
b) $20 + 0{,}6 \cdot 10 = 26$ und $10 + 1{,}6 \cdot 10 = 26$
Das Wasser steht dann 26 cm hoch.

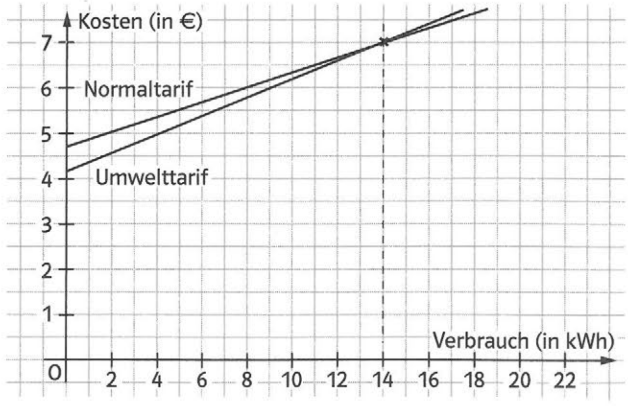
15 a) 10 Sekunden ≙ 2 Liter
1,5 Stunden = 90 Minuten = 5400 Sekunden
5400 Sekunden ≙ $2 \cdot \frac{5400}{10}$ Liter = 1080 Liter
Felix verbraucht jeden Abend ca. 1080 Liter Wasser.
b) 1000 Liter = $1\,m^3$, denn
$1\,m^3 = 1\,m \cdot 1\,m \cdot 1\,m = 10\,dm \cdot 10\,dm \cdot 10\,dm$
$= 1000\,dm^3 = 1000$ Liter
Damit kosten 1000 Liter Wasser 1,15 €.
c) 1000 Liter ≙ 1,15 €
1080 Liter ≙ $1{,}15 \cdot 1{,}08$ € = 1,242 € ≈ 1,24 €
Die abendliche Bewässerung kostet demnach 1,24 €.
d) Sei z die Bewässerungsdauer in Sekunden.
Dann wurden $2 \cdot \frac{z}{10}$ Liter Wasser verbraucht (siehe a)).
Die Kosten kann man dann mit dem Term $1{,}15 \cdot \left(2 \cdot \frac{z}{10}\right) : 1000$ berechnen (siehe c)).
Da 6,90 € bezahlt werden, muss man die Gleichung $1{,}15 \cdot \left(2 \cdot \frac{z}{10}\right) : 1000 = 6{,}9$ lösen. Zuerst vereinfacht man die linke Seite der Gleichung zu $0{,}00023 \cdot z = 6{,}9$. Durch Ausprobieren oder rückwärts denken erhält man $z = 30\,000$.
Die Bewässerungszeit ist demnach 30 000 Sekunden = 500 Minuten = $8\frac{1}{3}$ Stunden lang.
(Auch der Dreisatz kann als Lösungsweg verwendet werden.)

16 a) $\left.\begin{array}{l}\text{Normaltarif:} \\ 4{,}70 + 0{,}1615 \cdot h = \text{Kosten} \\ \text{Umwelttarif:} \\ \frac{49{,}92}{12} + 0{,}2001 \cdot h = \text{Kosten}\end{array}\right\}$ h steht für die Anzahl der Kilowattstunden
Die Kosten sind jeweils für einen Monat dargestellt.

Mit $h = 206$ kWh ist
$\text{Kosten}_{\text{Normaltarif}} = 4{,}7 + 0{,}1615 \cdot 206 = 37{,}969$

$\text{Kosten}_{\text{Umwelttarif}} = \frac{49{,}92}{12} + 0{,}2001 \cdot 206 = 45{,}3806$
Beim Normaltarif zahlen Janinas Eltern 37,97 € und beim Umwelttarif 45,38 €.
b) $4{,}7 + 0{,}1615 \cdot h = 4{,}16 + 0{,}2001 \cdot h \quad |-0{,}1615 \cdot h - 4{,}16$
$0{,}54 = 0{,}0386 \cdot h \quad |:0{,}0386$
$13{,}989\ldots = h$
Ab 14 kWh ist der Umwelttarif teurer als der Normaltarif.
Bis 13,99 kWh ist der Umwelttarif günstiger.

Grafische Lösung:



Am Schnittpunkt sind beide Tarife gleich teuer. Dies ist nach ca. 14 Stunden der Fall. Den genauen Wert kann man nur errechnen. Das Ablesen ist ungenauer (s. o.).

17 Umfang: $2a + 2b = 26$, wobei a und b die beiden Seitenlängen sind.
Es ist: $a = 4b$. Wenn man diese Gleichung in die erste einsetzt, erhält man: $2 \cdot (4b) + 2b = 10b = 26$, also $b = 2{,}6$ und $a = 4 \cdot 2{,}6 = 10{,}4$.
Die eine Seite ist höchstens 2,6 cm lang, die andere 10,4 cm.

Seite 135

18 Linke Seite: Billignet: 27 € Festkosten
Nochbilligernet: 4,50 € Grundgebühr und p € pro Onlineminute
Behauptung: $27 = 4{,}5 + 15 \cdot p$
Durch Auflösen erhält man: $p = 1{,}5$. Also müsste man beim Anbieter Nochbilligernet pro Onlineminute 1,50 € bezahlen. Dies ist unrealistisch.
Die Probe zeigt, dass kein mathematischer Fehler vorliegt, sondern die Angaben falsch sein müssen.
Rechte Seite:
Michael: $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$
Behauptung von Achim: bei 10 Minuten Vorsprung würde Michael 20 Minuten benötigen, um ihn einzuholen
Gesucht ist also die Geschwindigkeit von Achim, sei diese mit der Variablen v beschrieben:
Mit der Zeitumrechnung, dass 20 Minuten $\frac{1}{3}$ Stunden und 10 Minuten $\frac{1}{6}$ Stunden entsprechen folgt aus den Informationen die Gleichung:
$45 \cdot \frac{1}{3} = v \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)$, also $v = 30$.
Nach den Informationen müsste Achim also mit einer Geschwindigkeit von $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ laufen, was recht unwahrscheinlich ist. Allerdings ist eine durchschnittliche Trainingsgeschwindigkeit von $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auch nicht wirklich realistisch.
Die Probe zeigt, dass kein mathematischer Fehler vorliegt, sondern die Angaben falsch sein müssen.

19 a) Sei k das heutige Alter des Nachwuchses. Dann gilt: $35 + 4 = 10 \cdot (k + 4)$.
Durch Auflösen erhält man $k = -0{,}1$. Das bedeutet also, dass der Nachwuchs noch gar nicht geboren ist, sondern $\frac{1}{10}$ eines Jahres, also ca. 1,2 Monate vor seiner Geburt steht.
b) Individuelle Lösung.

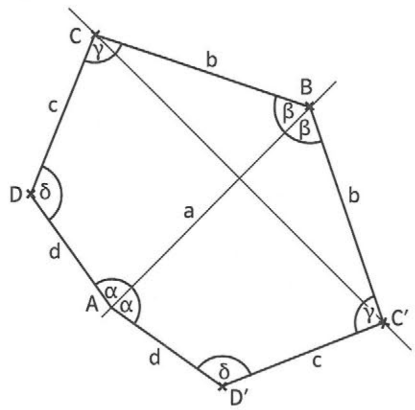
20 Individuelle Lösung z. B.:
a) Sei a der Preis für eine große Portion Popcorn im Kino. Dann beschreibt die Gleichung
$14 \cdot a = 35$ die Kosten für 14 Portionen. Wie teuer ist dann eine Portion?
Antwort: Eine Portion kostet 2,50 €.
b) Sei e der Preis für eine Telefoneinheit. Dann beschreibt die Gleichung $120 \cdot e + 20 = 32$ die Telefonkosten eines Monats, wenn die Monatsgrundgebühren 20 € betragen und insgesamt 120 Einheiten vertelefoniert wurden. Wie viel kostet eine Einheit, wenn die Gesamtkosten 32 € betragen?
Antwort: Eine Einheit kostet 0,10 €.
c) $5 \cdot k = 50$. Eine Kinokarte kostet am Familientag 5 €. Franziska hat etwas weniger als 50 € zur Verfügung. Wie viele Personen könnte sie ins Kino einladen? Antwort: Sie könnte $K = 1, 2, 3, \ldots$ oder 9 Personen einladen.
d) Sei a die Anzahl von Getränkekisten. Wie viele Kisten muss man auf einer Mauer (Höhe: 1,60 m) übereinander stapeln, um eine Gesamthöhe von über 2,90 m zu erreichen, wenn eine Kiste 40 cm hoch ist?
Antwort: Aus $0{,}4 \cdot a + 1{,}6 = 2{,}9$ ergibt sich $a = 3{,}25$. Also benötigt man mindestens 4 Kisten.

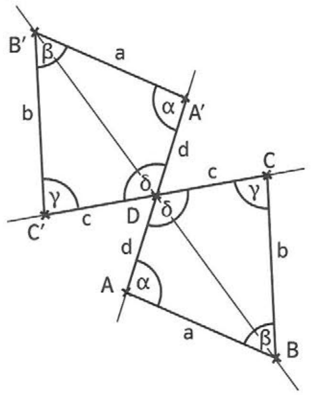
21 Individuelle Lösung.

22 a) Achsenspiegelung
1. Man zeichnet durch den Punkt P eine Hilfslinie, die senkrecht zur Spiegelachse verläuft.
2. Man legt den Spiegelpunkt P' so auf der Hilfslinie fest, dass der Punkt P und der Spiegelpunkt P' den gleichen Abstand von der Spiegelachse haben.

Punktspiegelung
1. Man legt das Spiegelzentrum Z fest.
2. Man verbindet den Punkt P mit dem Spiegelzentrum Z und verlängert die Strecke über Z hinaus.
3. Man trägt die Länge der Strecke $\overline{PZ}$ nochmals an Z an. Der Endpunkt der Strecke ist der Spiegelpunkt P'.

b)





Wiederholen – Vertiefen – Vernetzten

Seite 136

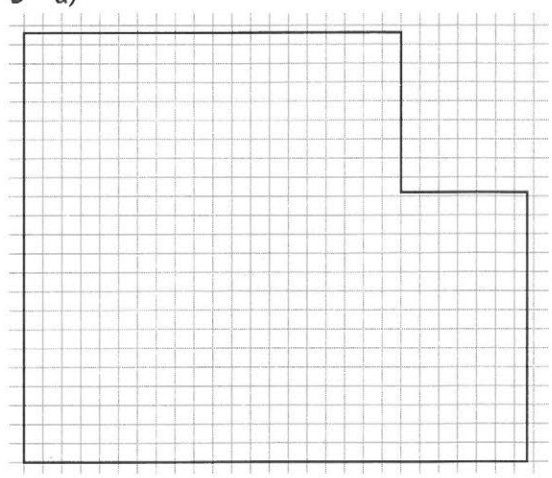
1 a) $8a - 2$ b) $6c + 15$ c) $-5x - 1{,}1$
d) $-2g + 16$ e) $-8t + 5$ f) $16r - 8$
g) $3x - 13$ h) $6n + 30$

2 a) $x + 18 = 23$ b) $21 + 3v = 12$ c) $9 + v = 0$

3 a) $x = \frac{7}{3}$ b) $x = \frac{2}{3}$ c) $x = \frac{2}{3}$
d) $x = 2$ e) $x = -\frac{2}{3}$ f) nicht lösbar
g) $x = 1{,}2$ h) $x \approx 2{,}7668$

4 a) $3{,}2 \cdot 30 \cdot 25\,m^3 + 20 \cdot 25 \cdot 0{,}8\,m^3 = 2800\,m^3$
b) $x \cdot 30 \cdot 25 + 20 \cdot 25 \cdot 0{,}8 = 750x + 400$ (Rauminhalt des Beckens in m^3)
c) Gleichung: $750x + 400 = 2000$
Lösung (rückwärts rechnen):
$2000 - 400 = 1600$; $1600 : 750 \approx 2{,}13$
Ergebnis: Für 2 Millionen Liter muss man das Schwimmerbecken ca. 2,13 m tief machen.
d) $2 \cdot 30 \cdot x + 2 \cdot 0{,}8 \cdot 20 + 0{,}8 \cdot 25 + 25 \cdot x + 30 \cdot 25 + 25 \cdot (x - 0{,}8) + 20 \cdot 25 = 50 \cdot 25 + 2 \cdot 25 \cdot x + 2 \cdot 30 \cdot x + 2 \cdot 0{,}8 \cdot 20 = 110x + 1282$ (Fläche in m^2 bei Tiefe x des Schwimmerbeckens in m).
e) Für 1000 € kann man 160 Liter Farbe kaufen (1000 : 6,25 = 160). Diese reicht für 1600 m^2.
Gleichung: $110x + 1282 = 1600$
Lösung (rückwärts rechnen): $1600 - 1282 = 318$; $318 : 110 \approx 2{,}89$
Ergebnis: Für 1000 € kann man das Schwimmerbecken ca. 2,89 m tief machen.

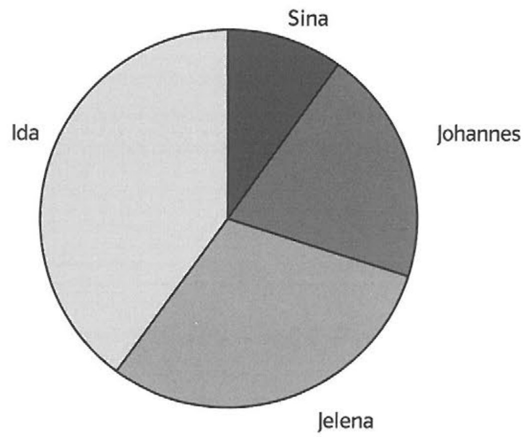
5 a)



b) Umfang: $11{,}4\,m + 9{,}9\,m + 4{,}3\,m + 3{,}4\,m + 7{,}1\,m + 13{,}3\,m = 49{,}4\,m$
c) $11{,}4 + 9{,}9 + 4{,}3 + (x - 9{,}9) + 7{,}1 + x = 2x + 22{,}8$ (Umfang in m bei Seitenlänge x in m)
d) Gleichung: $2x + 22{,}8 = 52$
Lösung (rückwärts rechnen): $52 - 22{,}8 = 29{,}2$; $29{,}2 : 2 = 14{,}6$
Ergebnis: Bei einem Umfang von 52 m ist das Grundstück 14,6 m lang.
e) $13{,}3 \cdot 7{,}1\,m^2 + 4{,}3 \cdot 9{,}9\,m^2 = 137\,m^2$ oder $11{,}4 \cdot 13{,}3\,m^2 - 4{,}3 \cdot 3{,}4\,m^2 = 137\,m^2$
f) $x \cdot 7{,}1 + 4{,}3 \cdot 9{,}9 = 7{,}1x + 42{,}57$ (Flächeninhalt in m^2 bei Seitenlänge x in m)
g) Judith: Fig. 5; Judith berechnet erst den Gesamtflächeninhalt $11{,}4 \cdot x$ und zieht dann den Flächeninhalt des Rechtecks rechts oben ab.
Pia: Fig. 6; Pia berechnet die drei Rechtecke links oben $(9{,}9 \cdot 4{,}3)$, links unten $(9{,}9 \cdot 7{,}1)$ und rechts $(7{,}1 \cdot (x - 9{,}9))$ separat und addiert dann ihre Flächeninhalte.
Katharina: Fig. 3; Katharina berechnet zunächst das linke Rechteck $(11{,}4 \cdot 9{,}9)$, dann das rechte $(7{,}1 \cdot (x - 9{,}9))$.
Lukas: Fig. 4; Lukas berechnet zunächst das obere Rechteck $(9{,}9 \cdot 4{,}3)$, dann das untere $(x \cdot 7{,}1)$.
h) Gleichung: $7{,}1x + 42{,}57 = 172{,}5$
Lösung (rückwärts rechnen): $172{,}5 - 42{,}57 = 129{,}93$; $129{,}93 : 7{,}1 = 18{,}3$
Ergebnis: Das Grundstück hat bei 1,725 a die Seitenlänge 18,3 m.

Seite 137

6 Wenn α der Winkel zu Sinas Anteil im Kreisdiagramm ist, so gehört zu Johannes der Winkel 2α, zu Jelena der Winkel 3α und zu Ida der Winkel 4α. Zusammen haben sie den Winkel
$\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360°$.
Durch Probieren oder Rückwärtsrechnen mit $\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 10\alpha$ und $360:10 = 36$ findet man, dass zu Sina der Winkel 36° gehört. Damit bekommt Johannes 72°, Jelena 108°, Ida 144°.



7 Eine Kante der quadratischen Basis ist 25 cm lang. Die Drahtstücke sind 8 mal 25 cm und 4 mal 75 cm.

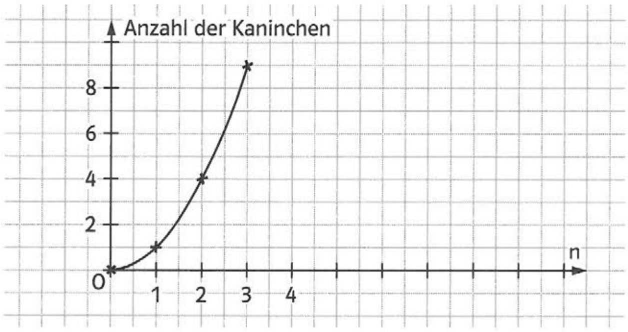
8 Es gilt $7 \cdot a = 3 \cdot (a + 6\,\text{cm})$. Die zweite Seite a ist 4,5 cm lang.

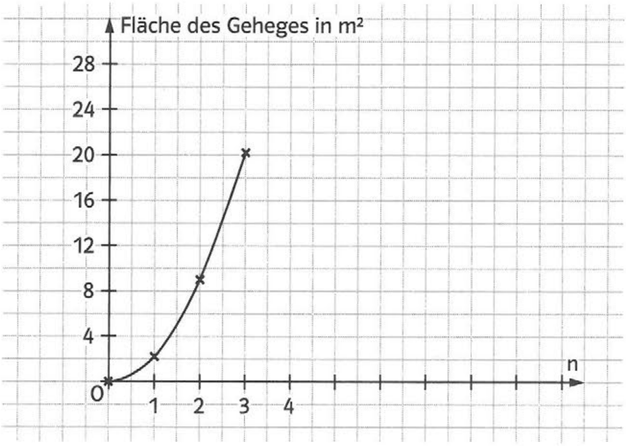
9 a)

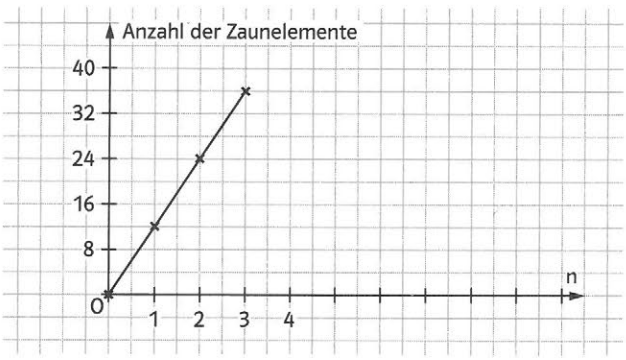
n	Anzahl Kaninchen	Anzahl Zaunelemente	Fläche des Geheges (in m²)
1	1	12	2,25
2	4	24	9
3	9	36	20,25

b) $n = 1$: $2{,}25 : 1 = 2{,}25\,\text{m}^2$ für 1 Kaninchen
$n = 2$: $9 : 4 = 2{,}25\,\text{m}^2$ für 1 Kaninchen
$n = 3$: $20{,}25 : 9 = 2{,}25\,\text{m}^2$ für 1 Kaninchen
Getestet an den 3 Beispielen hat Alina Recht.
c) Anzahl der Kaninchen: $K = n^2$, denn
bei $n = 1$ gibt es eine Reihe mit 1 Kaninchen;
bei $n = 2$ gibt es zwei Reihen mit je zwei Kaninchen;
bei $n = 3$ gibt es drei Reihen mit je drei Kaninchen;
⋮
Anzahl der Zaunelemente: $Z = 12 \cdot n$, denn pro Kaninchen am Zaun gibt es drei Zaunelemente, also $3 \cdot n$. Da es 4 Seiten gibt, kann man die Gesamtanzahl der Zaunelemente mit $4 \cdot 3n = 12n$ berechnen.

Fläche des Geheges: $A = 2{,}25 \cdot n^2$, denn pro Kaninchen am Zaun gibt es drei Zaunelemente je 0,50 m, also $3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5\,\text{m}$.
Bei n Kaninchen pro Reihe ergibt sich eine Länge von $1{,}5 \cdot n$. Die Fläche ergibt sich dann aus $1{,}5 \cdot n \cdot 1{,}5 \cdot n = 2{,}25 \cdot n^2$.







d) An den Graphen der Zuordnungen aus c) kann man erkennen, dass der Graph für die Anzahl der Kaninchen immer steiler wird, wobei der Graph für die Anzahl der Zaunelemente konstant ansteigt (proportionale Zuordnung). Daher nimmt die Anzahl der Kaninchen im Vergleich schneller zu!

10 a)
- Der Term $\frac{10}{55} \cdot t - \frac{10}{90} \cdot t$ beschreibt, wie viel Liter Wasser pro Sekunde (t beschreibt die Anzahl der Sekunden) effektiv abläuft, wenn der Wasserhahn geöffnet ist.
- Die Gleichung $\frac{10}{55} \cdot t - \frac{10}{90} \cdot t = 5$ beschreibt nun, nach wie viel Sekunden 5 l Wasser effektiv abgelaufen sind.

b) $\frac{10}{55} \cdot t - \frac{10}{90} \cdot t = 5 \quad |\text{vereinfachen}$
$0{,}0\overline{7} \cdot t = 5 \quad |:0{,}0\overline{7}$
$t \approx 70{,}71$

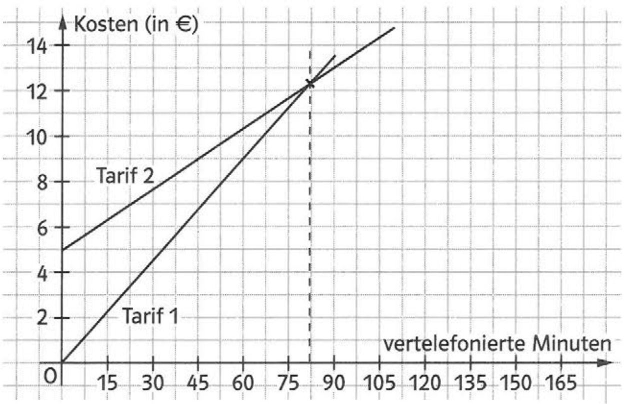
Der Messwert und der berechnete Wert stimmen gut überein. Die Differenz ergibt sich aus experimentellen Ungenauigkeiten.

- Aus dem Wasserhahn kommen in 1,5 Minuten (gleich 90 Sekunden) 10 l Wasser, also $\frac{10}{90}$ l pro Sekunde.
- 10 l Wasser laufen in 55 Sekunden durch den Abfluss, also $\frac{10}{55}$ l pro Sekunde.
- Wenn das Becken halb gefüllt ist, fasst es 5 l Wasser.

c) Individuelle Lösung.
d) Die Ungleichung $\frac{10}{55} \cdot t - \frac{10}{90} \cdot t \geq 5$ beschreibt, nach wie viel Sekunden 5 l oder mehr abgelaufen sind.

Seite 138

11 a) Zunächst werden die Gleichungen zu beiden Tarifen aufgestellt:
Tarif 1: $y = 0{,}15x$
Tarif 2: $y = 0{,}09x + 4{,}95$
Welcher Tarif für Tina günstiger ist, hängt davon ab, wie viele Minuten sie im Monat telefoniert. Um eine differenzierte Antwort geben zu können, wird der Schnittpunkt der beiden Geraden zunächst zeichnerisch bestimmt.

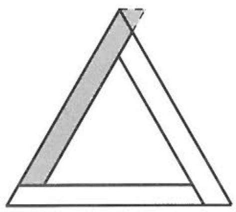


Grafische Lösung: Der Schnittpunkt der beiden Geraden liegt bei etwa 82 Minuten, d.h. wenn Tina weniger als 82 Minuten im Monat telefoniert, sollte sie sich für Tarif 1 entscheiden, wenn sie mehr als 82 Minuten telefoniert, sollte sie sich für Tarif 2 entscheiden.
b) Tarif 1: da sich ab schon 82 Minuten der Tarif 2 lohnt und Tina in diesem Fall nur 12,38 € monatlich zahlt, braucht der Vergleich der Flatrate nur mit Tarif 2 errechnet werden.
Tarif 2: Ab 168 Minuten monatlich (nur am Wochenende) lohnt sich die Telefonflatrate.
c) Beim linken Graphen beschreibt x die verbrauchten Minuten insgesamt und y die Gesamtkosten. Beim rechten Graphen sind die Kosten getrennt voneinander dargestellt. x beschreibt hier im Vergleich nur die verbrauchten Minuten bei den einzelnen Teiltarifen.
Die Kosten berechnen sich durch
$122 \cdot 0{,}49 + 176 \cdot 0{,}19 + 58 \cdot 0{,}09$ und $40 \cdot 0{,}15 = 104{,}44$.
Er müsste also 104,44 € bezahlen.
d) An der Rechnung aus c) erkennt man, dass der Term die Zusammensetzung der einzelnen Teiltarife und den entsprechenden Teilkosten ist. Wenn nun bei allen Teiltarifen gleichviele Minuten verbraucht wurden, kann man mit dem Term $0{,}49x + 0{,}19x + 0{,}09x + 0{,}15s$ die Kosten berechnen, wobei x die Anzahl der jeweils verbrauchten Minuten und s die Anzahl der SMS beschreibt. Der Term $0{,}77x + 0{,}15s$ ergibt sich aus dem obigen Term durch Vereinfachen (Zusammenfassen). Demnach hat Sebastian Recht.

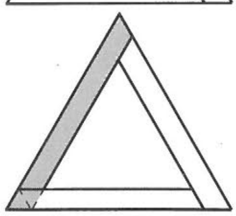
12 Sei a die Anzahl der Lotusblüten.
$\frac{a}{3} + \frac{a}{5} + \frac{a}{6} + \frac{a}{4} = \frac{20}{60}a + \frac{12}{60}a + \frac{10}{60}a + \frac{15}{60}a = \frac{57}{60}a$
Also ist der Rest: $\frac{3}{60}a = 6 \quad |\cdot \frac{60}{3}$
$a = \frac{6 \cdot 60}{3} = 120.$
Das Bündel enthält 120 Lotusblüten.
Oder: $a - \frac{a}{3} - \frac{a}{5} - \frac{a}{6} - \frac{a}{4} = 6$
$\frac{1}{20}a = 6$
$a = 120$

Seite 139

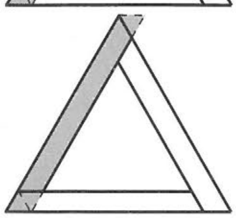
13 a) Weg in drei Stücke unterteilt. Betrachte zuerst eines davon. Beachte: n ist Grundlinienzahl außen.



$3 \cdot 2(n-1) - 3 \cdot 1$
$2(n-1)$ grau
1 Überstand



$3 \cdot (2n-1) - 3 \cdot 2$
$2n - 1$ grau
2 stehen über



$3 \cdot (2n-3)$
2n ist grau
3 stehen über

b) $3 \cdot (2n-3) = 6n - 9$
$3 \cdot (2n-1) - 3 \cdot 2 = 6n - 3 - 6 = 6n - 9$
$3 \cdot 2(n-1) - 3 \cdot 1 = 6n - 6 - 3 = 6n - 9$
Damit sind alle drei Terme äquivalent.

c) Kantenlänge der Platten: 2 m
50 : 2 = 25. Entlang einer Grundseite der Pyramide können 25 Platten anliegen. Damit liegen an einer Außenseite des Weges 28 Platten an.
Also $n = 28$. Dann ist $6 \cdot n - 9 = 6 \cdot 28 - 9 = 159$.
Man benötigt 159 Platten.
Kantenlänge: 2,50 m
50 : 2,5 = 20. Also 20 + 3 = 23 Platten liegen an einer Außenseite des Weges an.
Dann: $6 \cdot 23 - 9 = 129$.
Man benötigt 129 Platten.

14 a) Sei die Anzahl der Sitzplätze im oberen Rang mit o, im mittleren Rang mit m und im unteren Rang mit u beschrieben.
Dann gilt: $o + m + u = 66\,000$
Ferner ist: $o = 1{,}1 \cdot u$, da im oberen Rang 10 % mehr Sitzplätze sind als im unteren. Aus dieser Gleichung folgt: $u = \frac{o}{1{,}1}$.
Ferner ist: $m = o + 2000$.
Wenn man nun in die erste Gleichung die anderen beiden Gleichungen einsetzt, erhält man eine Gleichung nur mit der Variablen o, die man dann auflösen kann.
Aus $o + m + u = 66\,000$ wird dann
$o + (o + 2000) + \frac{o}{1{,}1} = 66\,000$. Durch Auflösen erhält man $o = 22\,000$.
Nun kann man m und u berechnen: $m = 24\,000$ und $u = 20\,000$. Also sind im unteren Rang 20 000 Sitzplätze, im mittleren Rang 24 000 Sitzplätze und im oberen Rang 22 000 Sitzplätze.
b) Individuelle Lösung.

15 a) $5(4x - 6) = -10(3 - 2x)$
$$\begin{aligned} 20x - 30 &= -30 + 20x &&|+30 \\ 20x &= 20x &&|:20 \\ x &= x \end{aligned}$$
Diese Gleichung ist allgemein, also für alle Zahlen gültig.
b) $5(3x - 6) = -10(3 - 2x)$
$$\begin{aligned} 15x - 30 &= -30 + 20x &&|+30 \\ 15x &= 20x &&|-15x \\ 0 &= 5x &&|:5 \\ 0 &= x \end{aligned}$$
Diese Gleichung hat die Lösung $x = 0$.
c) $5(4x - 6) = -10(2 - 3x)$
$$\begin{aligned} 20x - 30 &= -20 + 30x &&|+30 \\ 20x &= 10 + 30x &&|-30x \\ -10x &= 10 &&|:(-10) \\ x &= -1 \end{aligned}$$
Diese Gleichung hat die Lösung $x = -1$.
d) $5(4x - 6) = -10(4 - 2x)$
$$\begin{aligned} 20x - 30 &= -40 + 20x &&|-20x \\ -30 &= -40 \end{aligned}$$
Diese Gleichung ist unwahr, da $-30 \neq -40$. Deshalb ist sie nicht lösbar.
e) $6x - 14 = 2(-7 + 2x) + 2x$
$$\begin{aligned} 6x - 14 &= -14 + 4x + 2x &&|+14 \\ 6x &= 6x &&|:6 \\ x &= x \end{aligned}$$
Diese Gleichung ist allgemein gültig.
f) $6x - 14 = 2(-4 + 3x) + 2x$
$$\begin{aligned} 6x - 14 &= -8 + 6x + 2x &&|+8 \\ 6x - 6 &= 8x &&|-6x \\ -6 &= 2x &&|:2 \\ -3 &= x \end{aligned}$$
Diese Gleichung hat die Lösung $x = -3$.
g) $6x - 14 = 2(-7 + 3x) + 2x$
$$\begin{aligned} 6x - 14 &= -14 + 6x + 2x &&|+14 \\ 6x &= 8x &&|-6x \\ 0 &= 2x &&|:2 \end{aligned}$$
Diese Gleichung hat die Lösung $x = 0$.
h) $6x - 14 = 2(-6 + 2x) + 2x$
$$\begin{aligned} 6x - 14 &= -12 + 4x + 2x &&|+14 \\ 6x &= 2 + 6x &&|-6x \\ 0 &= 2 \end{aligned}$$
Diese Gleichung ist nicht lösbar, da $0 \neq 2$.

16 a) $x \cdot (x - 2) = 0$
Bei $x = 0$ ist $0 \cdot (0 - 2) = 0$ und
bei $x = 2$ ist $2 \cdot (2 - 2) = 2 \cdot 0 = 0$.
Demnach sind $x = 0$ und $x = 2$ die Lösungen der Gleichung $x \cdot (x - 2) = 0$.
b) Zu Rolf: Rolf erhält die Lösung $x = 2$. Diese Lösung ist zwar richtig, aber unvollständig. Wenn man durch x dividiert, fällt also eine Lösung $(x = 0)$ weg. Außerdem müsste man voraussetzen, dass $x \neq 0$ gilt, wenn durch x dividiert werden sollte.
Zu Nina: Wenn man Gleichungen mit 0 multipliziert, ergibt sich immer die Gleichung $0 = 0$. Der Wert und damit die Anzahl der Lösungen bleibt aber nicht erhalten – bei der veränderten Gleichung kommen mehr Lösungen in Frage, als bei der Originalgleichung. Das kann nicht stimmen.
c) $(x - 5) \cdot x = 0$;
hier sind die Lösungen $x = 0$ und $x = 5$
$0 = x \cdot (6 - x)$;
hier sind die Lösungen $x = 0$ und $x = 6$
Regel: Wenn man eine Gleichung in der Form $A \cdot B = 0$ schreiben kann, so erhält man die Lösungen, indem man die Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ löst. Dieses Verfahren funktioniert, weil $A \cdot B = 0$ gilt, wenn $A = 0$ oder $B = 0$ erfüllt ist.

Exkursion: Zahlenzauberei

Seite 140

1 a) $(z + 1) \cdot 100 + z \cdot 10 + (z - 1) \cdot 1 - [(z - 1) \cdot 100 + z \cdot 10 + (z + 1) \cdot 1]$
$= 100z + 100 + 10z + z - 1 - [100z - 100 + 10z + z + 1]$
$= \cancel{100z} + 100 + \cancel{10z} + \cancel{z} - 1 - \cancel{100z} + 100 - \cancel{10z} - \cancel{z} - 1$
$= 200 - 2 = 198$
b) größtmögliche Zahl: $(z + 1) \cdot 10 + z \cdot 1$
kleinstmögliche Zahl: $z \cdot 10 + (z + 1) \cdot 1$,
wobei z die kleinere Ziffer beschreibt.
Also: $(z + 1) \cdot 10 + z - [z \cdot 10 + (z + 1) \cdot 1]$
$= \cancel{10z} + 10 + \cancel{z} - \cancel{10z} - \cancel{z} - 1$
$= 10 - 1 = 9$
Das Ergebnis ist immer 9.
Für vier aufeinander folgende Ziffern sei z die kleinste Ziffer.
größtmögliche Zahl:
$(z + 3) \cdot 1000 + (z + 2) \cdot 100 + (z + 1) \cdot 10 + z \cdot 1$
kleinstmögliche Zahl:
$(z \cdot 1000 + (z + 1) \cdot 100 + (z + 2) \cdot 10 + (z + 3)$
Also:
$(z + 3) \cdot 1000 + (z + 2) \cdot 100 + (z + 1) \cdot 10 + z \cdot 1$
$- [z \cdot 1000 + (z + 1) \cdot 100 + (z + 2) \cdot 10 + (z + 3)]$
$= 1000z + 3000 + 100z + 200 + 10z + 10 + z$
$- [1000z + 100z + 100 + 10z + 20 + z + 3]$
$= \cancel{1000z} + 3000 + \cancel{100z} + 200 + \cancel{10z} + 10 + \cancel{z}$
$- \cancel{1000z} - \cancel{100z} - 100 - \cancel{10z} - 20 - \cancel{z} - 3$
$= 3000 + 200 + 10 - 100 - 20 - 3$
$= 3087$
Hier erhält man immer das Ergebnis 3087.

2 a) Sei r die Anzahl der Erbsen unter dem roten Becher. Dann ist die Anzahl der Erbsen unter dem blauen Becher $13 - r$.
Es gilt nach der folgenden Rechenvorschrift:
$6 \cdot r + 5 \cdot (13 - r)$. Durch Vereinfachen erhält man: $6 \cdot r + 65 - 5r = r + 65$.
Das Ergebnis wird einem gesagt, etwa 67.
Dann ist $r + 65 = 67 \quad | -65$
$r = 2$.
Also 2 Erbsen unter dem roten Becher und 11 $(13 - 2 = 11)$ Erbsen unter dem blauen Becher.
Bei einem Ergebnis von etwa 75 wären
$r + 65 = 75$, also $r = 10$ und $13 - 10 = 3$.
b) „Ich habe 9 Münzen. Verteile sie in deinen Händen. Multipliziere die Anzahl der Münzen in deiner linken Hand mit 5 und die in der rechten Hand mit 4. Addiere beide Ergebnisse und nenne mir das Ergebnis." – „37."
mögliche Lösung:
Sei l die Anzahl der Münzen in der linken Hand:
$5 \cdot l + 4 \cdot (9 - l) = 5l + 36 - 4l = l + 36$
Mit $l + 36 = 37$ folgt $l = 1$.
Sie hat 1 Münze in der linken und 8 Münzen in der rechten Hand.

Seite 141

3 a)

Zahl	Ereignis
2	8
4	16
5	20
7	28
10	40

b) Sei z die gedachte Zahl.
$(z + 5) \cdot 4 - 20 = 4 \cdot z + 20 - 20 = 4z$
Das Ergebnis muss man einfach durch 4 dividieren.
c) „Denke dir eine Zahl, addiere dann 7 und multipliziere das Ergebnis mit 5. Subtrahiere nun 29 und füge die gedachte Zahl hinzu. Dividiere nun durch 6."
$[(z + 7) \cdot 5 - 29 + z] : 6$
$= [5z + 35 - 29 + z] : 6 = [6z + 6] : 6 = z + 1$
Vom Ergebnis muss man nun 1 subtrahieren, um die gedachte Zahl zu erhalten.

4 a) Sei z die gedachte Zahl.
Wenn man die Vorschrift übersetzt, ergibt sich folgender Term:
$[(z + 4) \cdot 2 + 5] \cdot 4 - 8z = [2z + 8 + 5] \cdot 4 - 8z$
$= 8z + 52 - 8z = 52$
Da das Ergebnis bei allen Zahlen 52 ist, stimmt es mit der Zahl auf dem Zettel überein.
Text: „Der Term $[(z + 4) \cdot 2 + 5] \cdot 4 - 8z = 52$ erklärt alles."
b) $[(z - 3) \cdot 3 + 14] \cdot 2 - 6z = 10$
„Denke dir eine Zahl und subtrahiere 3. Multipliziere das Ergebnis mit 3 und addiere 14. Multipliziere nun mit 2 und subtrahiere das Sechsfache der gedachten Zahl. Das Ergebnis steht schon auf dem Zettel."
c) Man sollte diesen Trick mit jeder Rechenvorschrift nur einmal durchführen, weil dies Ergebnis ansonsten immer dasselbe wäre, was sehr auffällig ist.

5 a) Nach der 2. Anweisung liegen im
linken Stapel 2,
mittleren Stapel 9 und
rechten Stapel 4 Hölzer. Damit nach der 3. Anweisung im mittleren Stapel 6 Hölzer liegen, müssen noch 3 Hölzer aus dem mittleren Stapel beispielsweise auf den rechten Stapel verschoben werden. Es fällt bei verschiedenen Anfangssituationen auf, dass nach der 2. Anweisung im mittleren Stapel immer 9 Hölzer liegen.

b)

	linker Stapel	mittlerer Stapel	rechter Stapel
Anfangssituation	z	z	z
nach der 1. Anweisung	z − 3	z + 6	z − 3
nach der 2. Anweisung	z − 3	z + 6 − (z − 3)	z − 3 + (z − 3)
		= 9	= 2z − 6

z beschreibt die Anzahl der Hölzer in jedem Stapel in der Anfangssituation.

c) Da die Anzahl der Hölzer nach der 2. Anweisung im mittleren Stapel immer 9 ist, kann Kristine die dritte, vierte oder fünfte Anweisung so wählen, dass am Ende im mittleren Stapel so viele Hölzer liegen, wie von der Person genannt wurde.