

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- Alternative 2:
- Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. Medien/Materialien

- entfällt

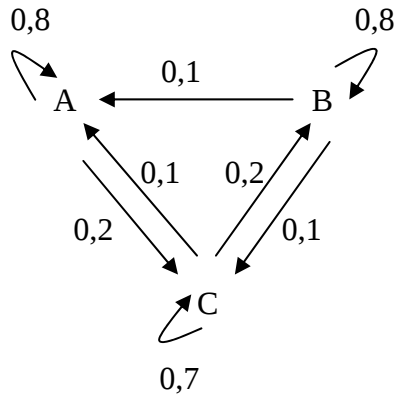
5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen**6.1 Modelllösungen****Modelllösung a)**

Übergangendiagramm:



Begründung: In der Diagonalen stehen die Prozentsätze der Käufer, die bei der Kaffeestelle bleiben, d. h. 80 % bei A, 80 % bei B und 70 % bei C, in der 1. Zeile die Anteile der zu A wechselnden Käufer (10 % von B und 10 % von C), in der 2. Zeile die Anteile der zu B wechselnden Käufer (0 % von A und 20 % von C) und in der 3. Zeile die Anteile der zu C wechselnden Käufer (20 % von A und 10 % von B).

Modelllösung b)

Aus der Ausgangsverteilung $\vec{x}_A = \begin{pmatrix} 150000 \\ 300000 \\ 450000 \end{pmatrix}$ ergibt sich nach einem Monat die Verteilung

$$\vec{x}_E = P \cdot \vec{x}_A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150000 \\ 300000 \\ 450000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195000 \\ 330000 \\ 375000 \end{pmatrix}.$$

Modelllösung c)

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,17 & 0,17 \\ 0,04 & 0,66 & 0,3 \\ 0,3 & 0,17 & 0,53 \end{pmatrix}$$

Die Komponente 0,3 in der dritten Zeile und ersten Spalte besagt im Sachzusammenhang, dass innerhalb von zwei Monaten 30 % der Käufer von A zu C wechseln.

Die Komponente 0,53 in der dritten Zeile und dritten Spalte besagt im Sachzusammenhang, dass nach zwei Monaten 53 % der Käufer bei C geblieben sind.

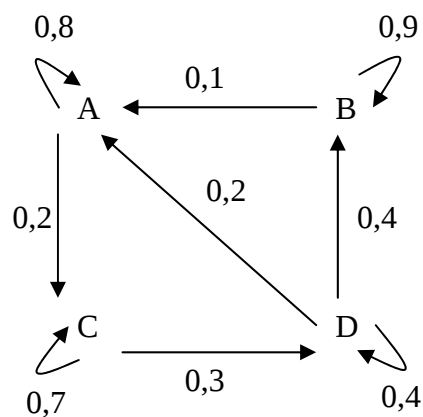
Modelllösung d)

Spaltensumme 1: Alle Käufer bleiben bei der Kaffeesorte bzw. wechseln zu einer der beiden anderen Sorten. Keiner verlässt das „System“ und niemand kommt hinzu. Es handelt sich um einen Austauschprozess.

Modellkritik: Die Annahme eines geschlossenen Systems ist nicht realistisch, da auscheidende Kaffeekäufer (Tod, Änderung der bevorzugten Getränkeart etc.) ebenso wenig berücksichtigt werden wie neu hinzukommende.

Modelllösung e)

(1) Übergangsdiagramm:



(2) Gesucht ist hier eine stationäre Verteilung: $Q \cdot \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich als prozentuale Verteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

Langfristig bedeutet das: 30 % aller Käufer kaufen Sorte A, 40 % Sorte B, 20 % Sorte C und 10 % Sorte D.

Modelllösung f)

$$(1) \text{ Neue Matrix: } Q' = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & x & 0,2 \\ 0 & 0,9 & y & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 1-(x+y+z) & 0 \\ 0 & 0 & z & 0,4 \end{pmatrix}$$

Da nur Käufer der Sorte C ihr Wechselverhalten ändern, unterscheidet sich die neue Matrix Q' nur in der dritten Spalte von der Matrix Q . Die neuen Wechselquoten von C zu A, B und D werden mit x , y und z bezeichnet, die Quote der bei C bleibenden Käufer ist dann $1 - (x + y + z)$.

(2) [Vereinfachte] Ausgangsverteilung: (40|20|40|10)

Verteilung nach einem Monat: (40|30|20|20)

Bestimmung der neuen Übergangsquoten:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & x & 0,2 \\ 0 & 0,9 & y & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 1-(x+y+z) & 0 \\ 0 & 0 & z & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} 40 \cdot 0,8 + 20 \cdot 0,1 + 40x + 10 \cdot 0,2 &= 40 \\ 20 \cdot 0,9 + 40y + 10 \cdot 0,4 &= 30 \\ 40 \cdot 0,2 + 40 \cdot (1 - (x + y + z)) &= 20 \\ 40z + 10 \cdot 0,4 &= 20 \end{aligned}$$

$$20 = 20$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= 0,1 \\ y &= 0,2 \\ z &= 0,4 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als neue Übergangsmatrix: $Q' = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,9 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	skizziert die monatliche Entwicklung in einem Übergangsdigramm.	4
2	beschreibt, inwiefern die Übergangsmatrix das Wechselverhalten der Käufer abbildet.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	berechnet die Verteilung nach einem Monat.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	berechnet P^2 .	3
2	interpretiert die Komponente in der dritten Zeile und ersten Spalte sowie die Komponente in der dritten Zeile und dritten Spalte von P^2 im Sachzusammenhang.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	interpretiert die Eigenschaft im Sachzusammenhang.	3
2	beurteilt die Angemessenheit der Modellannahme.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) skizziert das Wechselverhalten der Käufer in einem Übergangsdigramm.	5
2	(2) bestimmt die prozentuale Verteilung der Käufer, die sich im Folgemonat nicht ändert.	7
3	(3) interpretiert diese Verteilung im Hinblick auf das langfristige Käuferverhalten.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) begründet, dass das angegebene Verhalten durch die Matrix Q' beschrieben werden kann.	3
2	(2) ermittelt die neuen Übergangsquoten.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	skizziert die monatliche ...	4			
2	beschreibt, inwiefern die ...	4			
sachlich richtige Alternativen: (8)					
Summe Teilaufgabe a)		8			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	berechnet die Verteilung ...	4			
sachlich richtige Alternativen: (4)					
Summe Teilaufgabe b)		4			

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	berechnet P^2 .	3			
2	interpretiert die Komponente ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (6)					
Summe Teilaufgabe c)		6			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	interpretiert die Eigenschaft ...	3			
2	beurteilt die Angemessenheit ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (6)					
Summe Teilaufgabe d)		6			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) skizziert das Wechselverhalten ...	5			
2	(2) bestimmt die prozentuale ...	7			
3	(3) interpretiert diese Verteilung ...	4			
sachlich richtige Alternativen: (16)					
Summe Teilaufgabe e)		16			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) begründet, dass das ...	3			
2	(2) ermittelt die neuen ...	7			
sachlich richtige Alternativen: (10)					
Summe Teilaufgabe f)		10			

Summe insgesamt		50			
------------------------	--	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	100			
aus der Punktzahl resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktzahlen aus EK und ZK: _____

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0