



Name: \_\_\_\_\_

## Abiturprüfung 2011

### Mathematik, Grundkurs

---

#### Aufgabenstellung:

Drei Kaffeeröstereien konkurrieren mit ihren Kaffeesorten A, B und C um die Gunst der Käufer, wobei folgendes monatliche Wechselverhalten der Käufer zu beobachten ist:

20 % der Käufer der Sorte A wechseln zu Sorte C,

10 % der Käufer der Sorte B wechseln zu Sorte A,

10 % der Käufer der Sorte B wechseln zu Sorte C,

10 % der Käufer der Sorte C wechseln zu Sorte A,

20 % der Käufer der Sorte C wechseln zu Sorte B.

Gehen Sie davon aus, dass die übrigen Käufer bei der gewählten Kaffeesorte bleiben und sich das Wechselverhalten über längere Zeit nicht ändert.

a) *Skizzieren Sie das monatliche Wechselverhalten der Käufer in einem Übergangs-*

*diagramm und beschreiben Sie, inwiefern die Übergangsmatrix  $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$*

*das dargestellte Wechselverhalten der Käufer abbildet. (8 Punkte)*

b) *Berechnen Sie die Verteilung nach einem Monat, wenn vorher 150 000 Sorte A, 300 000 Sorte B und 450 000 Sorte C gekauft haben. (4 Punkte)*

c) *Berechnen Sie  $P^2$  und interpretieren Sie die Komponente in der dritten Zeile und ersten Spalte sowie die Komponente in der dritten Zeile und dritten Spalte von  $P^2$  im Sachzusammenhang. (6 Punkte)*



Name: \_\_\_\_\_

d) Die Matrix  $P$  aus Teil a) hat die besondere Eigenschaft, dass alle Komponenten größer oder gleich Null sind und alle Spalten die Summe 1 haben. Eine solche Matrix wird stochastisch genannt.

*Interpretieren Sie diese Eigenschaft im Sachzusammenhang und beurteilen Sie die Angemessenheit der dahinter liegenden Modellannahme für das Wechselverhalten der Käufer zwischen den drei Kaffeesorten.* (6 Punkte)

Eine weitere Kaffeerösterei bietet eine vierte Kaffeesorte D an. Das Wechselverhalten der

Käufer wird durch die Matrix  $Q = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$  beschrieben, wobei eine Verteilung

der Käufer auf die Sorten A, B, C und D durch den Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{pmatrix}$  gegeben ist.

e) (1) *Skizzieren Sie das monatliche Wechselverhalten der Käufer in einem Übergangsdiagramm.*

(2) *Bestimmen Sie für die Übergangsmatrix  $Q$  die prozentuale Verteilung der Käufer, die sich im Folgemonat nicht ändert.*

*Interpretieren Sie diese Verteilung im Hinblick auf das langfristige Käuferverhalten.*

(16 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

- f) Durch mangelnde Betreuung der Stammkunden verliert die Rösterei, die Sorte C anbietet, Käufer an die übrigen Röstereien, so dass sich die entsprechenden Übergangsquoten ändern. Alle anderen Übergangsquoten bleiben gleich.

Die Verteilung ändert sich in einem Monat von (400 000|200 000|400 000|100 000) zu (400 000|300 000|200 000|200 000).

- (1) *Begründen Sie, dass dieses Verhalten durch eine Matrix des Typs*

$$Q' = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & x & 0,2 \\ 0 & 0,9 & y & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 1-(x+y+z) & 0 \\ 0 & 0 & z & 0,4 \end{pmatrix} \text{ beschrieben werden kann.}$$

- (2) *Ermitteln Sie die neuen Übergangsquoten.*

(10 Punkte)

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung