c) $P(\mu - \sigma \leqq x \leqq \mu + \sigma) = P(3 \leqq x \leqq 5)$

$$= \frac{16 + 19 + 16}{81} = \frac{51}{81} \approx 63\,\%$$

Dieses Ergebnis passt recht gut zur Angabe der Faustregel (68,3 %).

14 a)

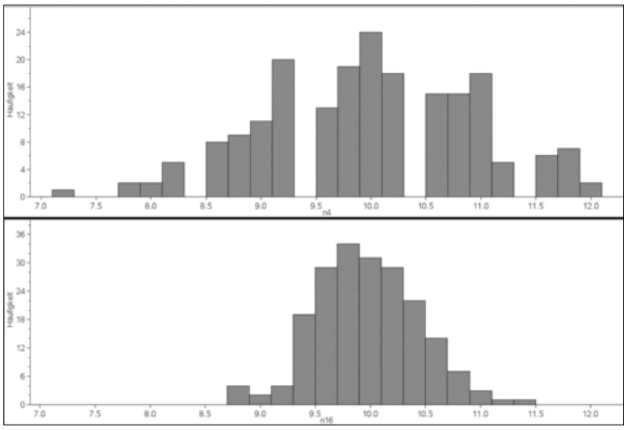
r	7	8	9	10	11	12	13
P(X = r)	$\frac{1}{7}$						$\frac{1}{7}$

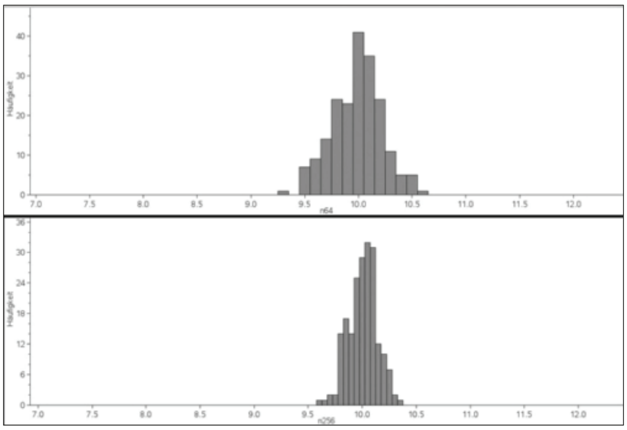
$\mu = 10$ (aus Gründen der Symmetrie)

$\sigma^2 = [9 + 4 + 1] \cdot \frac{2}{7} = \frac{14 \cdot 2}{7} = 4;\ \ \sigma = 2$

b) Bestätigung durch Simmulation

	A n4	B n16	C n64	D n256
=	=round(se	=round(se	=round(se	=round(se
1	11.75	10.313	9.828	10.004
2	10.	9.688	9.719	10.027
3	8.5	9.75	9.719	9.898
4	8.75	9.688	10.016	10.035
5	11.	10.625	10.234	10.031
6	11.	10.188	10.188	10.148
7	10.25	9.875	9.984	9.961
8	11.	9.625	10.484	10.063
9	10.5	9.625	10.266	10.137
10	10.	10.	10.203	10.125
11	10.25	10.188	9.672	10.125
12	10.75	9.5	10.266	10.063
13	8.25	9.75	9.797	9.902
14	10.	10.125	10.109	9.926
15	7.75	10.375	10.094	9.938
16	10.25	9.375	10.25	9.664
17	9.25	10.063	9.969	10.18
18	10.25	9.5	10.234	10.043
19	12.	10.875	9.844	9.996
20	10.75	9.938	10.078	10.012





3 Bernoulli-Experimente, Binomialverteilung

Seite 214

Einstiegsproblem
Man wettet eher auf Sarah.
Sarah: $P(X = 2) = 3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 43{,}2\,\%$
Mario: $P(X = 2) = 3 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 38{,}4\,\%$

Seite 215

1 a) Ergebnisse z. B.: „Wappen“, „Zahl“, Treffer (z. B.): „Wappen“, $p = \frac{1}{2}$

b) Ergebnisse z. B.: „Eine Sechs fällt“, „Keine Sechs fällt“, Treffer (z. B.): „Eine Sechs fällt“, $p = \frac{1}{6}$

c) Ergebnisse z. B.: „Bauteil funktioniert“, „Bauteil defekt“, Treffer (z. B.): „Bauteil funktioniert“; p kann aus einer Statistik bestimmt werden.

d) Ergebnisse z. B.: „Das Medikament heilt die Krankheit“, „Das Medikament heilt die Krankheit nicht“, Treffer (z. B.): „Das Medikament heilt die Krankheit“; p kann aus einer Statistik bestimmt werden.

Seite 216

2 a) $\binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$ b) $\binom{2}{0} = 1$

c) $\binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5$ d) $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$

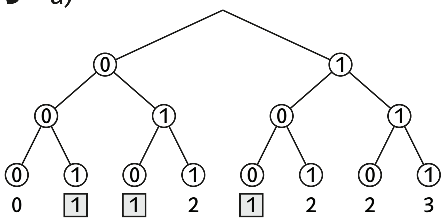
e) $\binom{12}{6} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5544$

f) $\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$

g) $\binom{12}{7} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \binom{12}{5}$

h) Falls n gerade ist, ist $\binom{n}{k}$ bei $k = \frac{n}{2}$ maximal und es gilt $\binom{n}{k-d} = \binom{n}{k+d}$.

3 a)



b)

r	0	1	2	3
$\binom{3}{r}$	1	3	3	1

c)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

d)

0	1	2	3
$1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)$	$1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$

4 a) 1) $20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{8\cdot 8} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$

2) $\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{5}{16}\right] = \frac{11}{32} = 0{,}34375$

3) analog zu 2)

b) $P(X < 3)$ und $P(X = 3)$ verkleinern sich $P(X > 3)$ vergrößert sich.
Das Säulendiagramm der Binomialverteilung verschiebt sich nach rechts.

5 Es liegt eine Bernoulli-Kette vor. Treffer: „Antwort richtig“, $p = \frac{1}{3}$, $n = 8$. X sei die Anzahl der richtigen Antworten.

a) $P(X = 4) \approx 0{,}1707$ b) $P(X \geqq 4) \approx 0{,}2586$

c) $P(X \leqq 3) \approx 0{,}7414$ d) $P(X > 4) \approx 0{,}0879$

6 Es liegt eine Bernoulli-Kette vor. Treffer: „Flasche enthält weniger als 495 cm^3“, $p = 0{,}02$, $n = 20$.
X sei die Anzahl der Flaschen, die weniger als 495 cm^3 enthalten.

a) $P(X = 2) \approx 0{,}0528$ b) $P(X \geqq 2) \approx 0{,}0599$

c) $P(X \leqq 2) \approx 0{,}9929$

7 a) $\binom{10}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^{10} \approx 10{,}74\,\%$

b) $\binom{10}{3}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^7 \approx 20{,}13\,\%$

c) $1-(0{,}8)^{10} \approx 89{,}26\,\%$

Seite 217

10 a) Von den acht möglichen Kombinationen gehören nur je eine zu „0 W“ und „3 W“, je drei zu „1 W“ und „2 W“. Die Annahme, die vier möglichen Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich, ist falsch.

b)

0 W	1 W	2 W	3 W
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c) $E_{Jan}(X) = 1{,}5$, richtig: $E(X) = 1{,}5$.
Obwohl Jans Verteilung nicht stimmt, ist der Erwartungswert korrekt.

d) individuelle Lösungen

11 a) Es ergibt sich in der nten Zeile die Summe 2^n.

b) Richtig

c) Trotz der Bruch-Schreibweise sind die Ergebnisse ganzzahlig.

d) Es gilt stets $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $0 \leqq k \leqq n$

e) Richtig, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für alle $n \geqq 0$.

12 a) $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$,
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$,
$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
Die auftretenden Koeffizienten sind gerade die Zahlen im Pascal’schen Dreieck.

b) $(a+b)^5$
$= (a+b)^4\cdot(a+b)$
$= (1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4)\cdot(a+b)$
$= 1\cdot a^5 + (1+4)a^4b + (4+6)a^3b^2 + (6+4)a^2b^3 + (4+1)ab^4 + 1\cdot b^5$
$= 1\cdot a^5 + 5\cdot a^4b + 10\cdot a^3b^2 + 10\cdot a^2b^3 + 5\cdot ab^4 + 1\cdot b^5$.

Jeweils zwei Terme ergeben zusammen (außer bei a^5 und b^5) den Koeffizienten für die nächste Zeile. Dabei werden gerade die Zahlen aus dem Pascal’schen Dreieck erzeugt.
$(a+b)^6 = 1\cdot a^6 + 6\cdot a^5b + 15\cdot a^4b^2 + 20\cdot a^3b^3 + 15\cdot a^2b^4 + 6\cdot ab^5 + 1\cdot b^6$.

c) $(x+3)^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
$(2-x)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

13 a) $\frac{1}{3}B_{3;\frac{1}{3}}(2) + \frac{2}{3}B_{3;\frac{1}{3}}(3) =$
$\frac{1}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \frac{2}{3}\cdot\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 =$
$\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 3 + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot 1 = 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}$
$= \binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}$
$= B_{4;\frac{1}{3}}(3)$

b) Zu 3 Treffern bei 4 Versuchen gelangt man nur über 3 Treffer bei 3 Versuchen und einer Niete im 4. Versuch – oder über 2 Treffer in 3 Versuchen und einem Treffer im 4. Versuch.
Pfad und Summenregel liefern dann die genannte Formel.

c) $B_{n;p}(k) = p \cdot B_{n-1;p}(k-1) + (1-p)B_{n-1;p}(k)$
Mit dieser Formel kann man eine Binomialverteilung aus der vorherigen nur über Summen und Produkte berechnen, man muss nicht potenzieren und braucht keine Binomialkoeffizienten.

4 Praxis der Binomialverteilung

Seite 218

Einstiegsproblem
a) Die Wahrscheinlichkeiten, dass man bei fairen Münzen ganz genau 50 % „Wappen" erhält, werden mit wachsendem Versuchsumfang immer kleiner. So sind z. B. bei 1000 Münzwurfen 499 Wappen fast genauso wahrscheinlich wie 500 Wappen.
b) Die Wahrscheinlichkeiten werden immer größer und nähern sich 50 % von unten.
c) Die Wahrscheinlichkeiten werden immer kleiner und nähern sich 50 % von oben.

Seite 220

1 a) $P(X = 4) \approx 13{,}60\,\%$
$P(X \leqq 4) \approx 89{,}64\,\%$
$P(X \geqq 3) \approx 45{,}95\,\%$
$P(1 \leqq X \leqq 5) \approx 88{,}53\,\%$
$P(X \leqq 1$ oder $X \geqq 5) \approx 38{,}30\,\%$
b) $P(X = 4) \approx 0{,}1706$
$P(X \leqq 4) \approx 0{,}8178$
$P(X \geqq 3) = 1 - P(X \leqq 2) \approx 0{,}5802$
$P(1 \leqq X \leqq 5) = P(X \leqq 5) - P(X = 0) \approx 0{,}8716$
$P(X \leqq 1$ oder $X \geqq 5) = P(X \leqq 1) + P(X \geqq 5)$
$= P(X \leqq 1) + 1 - P(X \leqq 4) \approx 0{,}3768$

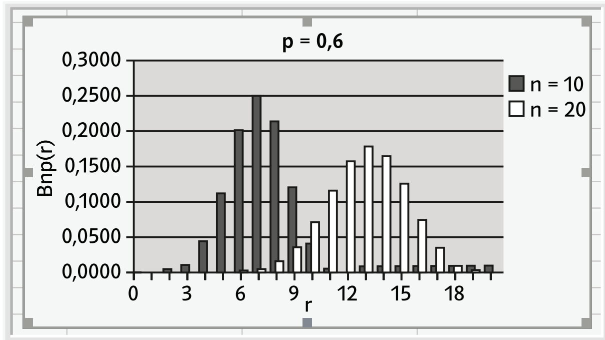
2 a) $B_{25;0,2}(5) \approx 19{,}6\,\%$
b) $F_{25;0,2}(6) - F_{25;0,2}(3) \approx 54{,}6\,\%$
c) $F_{25;0,2}(5) \approx 61{,}7\,\%$
d) $1 - F_{25;0,2}(5) \approx 38{,}2\,\%$

3 a) 1) 17,62 % 2) 16,02 % 3) 17,46 %
4) 58,81 % 5) 74,83 % 6) 37,04 %
b) individuelle Lösungen

4 X ist binomial verteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = \frac{1}{6}$.
a) Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 16{,}7$;
Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 3{,}7$.
b) 2-σ-Intervall
$[\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma] = [\sigma;\ 24]$
(Die Grenzen der σ-Intervalle werden als ganze Zahlen angegeben, weil X nur ganzzahlige Werte annimmt. Dabei wird die linke Grenze auf 10 aufgerundet und die rechte auf 24 abgerundet.)
Wahrscheinlichkeit des 2-σ-Intervalls: 0,9570.

c) Man zeichnet ein Säulendiagramm mit Maximalstelle μ und Wendestellen bei $\mu \pm \sigma$. Die Hochachse beschriftet man so, dass die Gesamtlänge aller Säulen 1 wird.

5 $n = 10$: $\mu = 6$, $\sigma \approx 1{,}55$,
$P([\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]) \approx 0{,}982$
$n = 20$: $\mu = 12$, $\sigma \approx 2{,}19$,
$P([\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]) \approx 0{,}963$

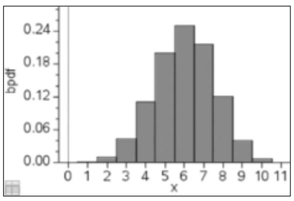


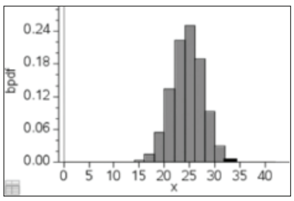
Oben sind genaue Graphen dargestellt. Für eine Skizze müssen zumindestest die Achsenbezeichnungen und die Form der Glocke – etwa durch eine gestrichelte Kurve – erkennbar sein. Einige Werte sollten eingetragen werden.

6 X: Anzahl der Sonntagskinder, $n = 28$; $p = \frac{1}{7}$.
Die Annahme der Gleichverteilung der Geburtstage ist allerdings nicht gut erfüllt (am Wochenende weniger Geburten).
a) $\mu = 4$. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich vier Sonntagskinder im Kurs befinden, ist am größten.
b) $P(\mu - \sigma \leqq X \leqq \mu + \sigma) = P(2{,}15 \leqq X \leqq 5{,}85)$
$= P(3 \leqq X \leqq 5) \approx 58{,}21\,\%$
c) Am wahrscheinlichsten sind $\mu = 100$ Sonntagskinder in der Schule;
$P(\mu - \sigma \leqq X \leqq \mu + \sigma) = P(90{,}7 \leqq X \leqq 109{,}3)$
$= P(91 \leqq X \leqq 109) \approx 69{,}53\,\%$

Seite 221

9 a) individuelle Lösungen
b)





c) $B_{10;0,6}$: $\mu = 6$; $\sigma = \sqrt{2,4}$
$B_{40;0,6}$: $\mu = 24$; $\sigma = \sqrt{9,6}$

	$B_{10;0,6}$	$B_{40;0,6}$	σ-Regel
1σ-Umgebung	66,65 %	74,17 %	68,3 %
Abweichung	1,65 %	5,87 %	
2σ-Umgebung	98,17 %	96,55 %	95,4 %
Abweichung	2,77 %	1,15 %	
3σ-Umgebung	99,83 %	99,82 %	99,7 %
Abweichung	0,13 %	0,12 %	

10 Je höher die Versuchszahl n bei fester Trefferwahrscheinlichkeit p, desto flacher und breiter das Säulendiagramm und desto weiter rutscht das Maximum nach rechts.
Je größer die Trefferwahrscheinlichkeit p bei fester Versuchszahl n desto weiter rutscht das Maximum des Histogramms nach rechts. Besonders breit sind die Histogramme bei p – 0,5.
Die Aussagen über das Maximum lassen sich durch $\mu = n \cdot p$ begründen, die Aussagen über die „Verteilungsbreite" resultieren aus der Formel $\sigma^2 = n \cdot p(1 - p)$. Bei festen n nimmt σ^2 sein Maximum an bei $p = \frac{1}{2}$.

11 $n = 10$; $p = 0,8$.
Kontrolle: $\mu = 8$; $P(X = \mu) = 0,3020$;
$P(X = 6) = 0,0881$; $P(X = 10) = 0,1074$.
$n = 20$; $p = 0,4$.
Kontrolle: $\mu = 8$; $P(X = \mu) = 0,1797$;
$P(X = 6) = 0,1244$; $P(X = 10) = 0,1171$.

12 n = 1:
$\mu = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = 0$
$\sigma^2 = (0 - p)^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p$
$= p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3$
$= p - p^2 - p(1 - p)$
$= p \cdot q$
n = 3:
$\mu = 0 \cdot q^3 + 1 \cdot 3p(1 - p)^2 + 2 \cdot 3p^2(1 - p) + 3 \cdot p^3$
$= 3p(1 - 2p + p^2) + 6p^2(1 - p) + 3p^3$
$= 3p$
$\sigma^2 = (0 - 3p)^2 \cdot q^3 + (1 - 3p)^2 \cdot 3p(1 - p)^2$
$+ (2 - 3p)^2 \cdot 3p^2(1 - p) + (3 - 3p)^2 \cdot p^3$
$= (-9p^5 + 27p^4 - 27p^3 + 9p^2)$
$+ (27p^5 - 72p^4 + 66p^3 - 24p^2 + 3p)$
$+ (-27p^5 + 63p^4 - 48p^3 + 12p^2)$
$+ (9p^5 - 18p^4 + 9p^3)$
$= -3p^2 + 3p = 3p(1 - p) = \sigma^2$
(berechnet nach der Formel für die Binomialverteilung)

13 Der Prüfplan ist besser, bei dem der Händler die kleinere Irrtumswahrscheinlichkeit eingeht, d.h., die Wahrscheinlichkeit die Sendung abzulehnen, obwohl höchstens 5 % Ausschuss insgesamt vorhanden ist.
Sei X: Anzahl der Ausschussstücke.
Prüfplan I: X ist $B_{10;\,0,05}$-verteilt.
$P(X \geqq 1) \approx 0,4013$
Prüfplan II: X ist $B_{20;\,0,05}$-verteilt.
$P(X \geqq 2) \approx 0,2642$
Beim Prüfplan I kann also die Lieferung mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 40,13 % abgelehnt werden, beim Prüfplan II mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 26,42 %. Dementsprechend wählt man als Händler eher Prüfplan I, als Lieferant eher Prüfplan II.

5 Problemlösen mit der Binomialverteilung

Seite 222

Einstiegsproblem
Das linke Diagramm gehört zu $P(X \leqq 11)$, das mittlere zu $P(X \leqq 5)$ und das rechte zu $P(X \leqq 7)$.
Denn $P(X \leqq 5)$ fällt am schnellsten ab mit wachsendem p, weil z.B. bei $p = 0,5$ die Wahrscheinlichkeiten nahe beim Erwartungswert 10 relativ groß sind, aber für kleinere Werte bis 5 nur sehr klein. Daher fällt $P(X \leqq 11)$ erst für relativ große Werte von p ab.

Seite 223

1 a) 0,6333 b) 0,1720
c) 0,8108 d) 0,6232

2 X: Anzahl der Stornierungen; X ist binomialverteilt mit $n = 50$; $p = 0,1$.
a) $P(X \leqq 1) = 0,0338$ b) $P(x > 3) = 0,7497$

3 a) $P_{0,95}(X \leqq 90) = F_{100;0,95}(90) \approx 2,8\,\%$
b) $P_{0,85}(X \geqq 91) = 1 - F_{100;0,85}(90) \approx 5,5\,\%$
c) $P_{0,95}(X \leqq 360) = F_{400;0,95}(360) \approx 0,003\,\%$
$P_{0,85}(X \geqq 361) = 1 - F_{400;0,85}(360) \approx 0,13\,\%$
Wenn man den Stichprobenumfang vergrößert, wächst die Entscheidungssicherheit.
Die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen wird reduziert.
d) Man nimmt hier an, das die Keimfähigkeiten der Zwiebeln voneinander unabhängig sind. Falls die Zwiebeln aber vom gleichen Beet stammen, machen sich biologische Rahmenbedingungen (Feuchtigkeit, Düngeeinfluss, …) bei allen Zwiebeln ähnlich bemerkbar. Die Annahme der Unabhängigkeit erscheint zweifelhaft.